Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 2, С. 36–45

УДК **517.9**

О СВОЙСТВЕ ВНУТРЬ-ПРОДОЛЖАЕМОСТИ ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ НА ВЫПУКЛЫХ ЛОКАЛЬНО ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ[1]

С. Н. Мелихов, З. Момм

Пусть Q — выпуклое локально замкнутое множество в $\mathbb{C}^N$; $A(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q, с естественной топологией проективного предела. В статье доказаны необходимые и (отдельно) достаточные условия геометрического характера того, что последовательность экспонент является абсолютно представляющей системой в $A(Q)$.

Ключевые слова: абсолютно представляющая система экспонент, локально замкнутое множество, пространство аналитических функций.

Введение

Пусть Q — выпуклое локально замкнутое подмножество $\mathbb{C}^N$, $A(Q)$ — пространство всех функций, голоморфных в некоторой открытой окрестности Q, с естественной топологией проективного предела (детали см. ниже). Частными случаями пространств $A(Q)$ являются пространство Фреше функций, голоморфных в выпуклой области в $\mathbb{C}^N$, пространство ростков функций, голоморфных на выпуклом компакте в $\mathbb{C}^N$, пространство вещественно аналитических функций на выпуклом открытом подмножестве $\mathbb{R}^N$. В настоящей статье мы доказываем необходимые и (отдельно) достаточные условия того, что последовательность экспонент является абсолютно представляющей системой в $A(Q)$. Показано (теорема 8), что необходимым условием того, что система экспонент $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$, для которой $\lim\limits_{|k|\to\infty}\frac{\log|k|}{|\lambda_k|}=0$ (при условии, что Q обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности, в случае $N>1$), является следующее геометрическое свойство Q: пересечение Q с любой опорной гиперплоскостью к замыканию Q компактно (теорема 8). Отсюда следует, что для открытого подмножества $Q\subset\mathbb{R}^N$ в пространстве $A(Q)$ вещественно аналитических функций на Q не существует такой абсолютно представляющей системы экспонент. Для выпуклого компакта K доказаны (теорема 14) достаточные условия геометрического характера (невырожденность и гладкость компакта K в направлениях, связанных с Q), при которых всякая абсолютно представляющая в пространстве Фреше $A(\operatorname{int}Q+K)$ система экспонент $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$, для которой $\lim\limits_{|k|\to\infty}\frac{\log|k|}{|\lambda_k|}=0$, является также абсолютно представляющей в $A(Q)$ (т. е. исследовано некоторое свойство внутрь-продолжаемости абсолютно представляющей системы экспонент). Ранее теорема 14 была доказана для произвольной выпуклой области Q и выпуклого компакта

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а и Немецкой службы академических обменов (DAAD).

K (без предположения $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\log|k|}{|\lambda_k|} = 0$) Ю. Ф. Коробейником и А. Ф. Леонтьевым [2] при $N = 1$ (в статье [2] и введен термин «внутрь-продолжаемость») и А. В. Абаниным [1] при $N \geqslant 1$.

1. Локально выпуклые множества и их свойства

Для множества $B \subset \mathbb{C}^N$ через $\operatorname{conv}(B)$, $\operatorname{cl} B$ и $\operatorname{int} B$ обозначим выпуклую оболочку, замыкание и внутренность B соответственно. Символы $\operatorname{int}_r B$, $\partial_r B$ обозначают относительную внутренность и относительную границу B относительно некоторого большего множества (которое определяется из контекста). Полагаем $S(z,r) := \{w \in \mathbb{C}^N : |w - z| < r\}$, $z \in \mathbb{C}^N$, $r > 0$; $U := S(0,1)$; $\langle w, t\rangle := \sum\limits_{k=1}^{N} w_k t_k$, $|w| := \langle w, \overline{w}\rangle^{1/2}$, $w \in \mathbb{C}^N$.

Определение. Множество Q в $\mathbb{C}^N$ называется локально замкнутым, если для любой точки $z \in Q$ существует ее замкнутая окрестность V такая, что пересечение $Q \cap V$ замкнуто.

Ясно, что любое замкнутое или открытое подмножество $\mathbb{C}^N$ локально замкнуто. Следующая характеризация выпуклых локально замкнутых множеств установлена в [13, лемма 1.2].

Лемма 1. *Пусть множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ выпукло. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Q локально замкнуто.*

(ii) *Q имеет счетную фундаментальную систему компактных подмножеств.*

(iii) *Q является объединением своей относительной внутренности $\operatorname{int}_r Q$ и открытой части ω своей относительной границы $\partial_r Q$. Если это так и $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальные системы компактных подмножеств $\operatorname{int}_r Q$ и ω соответственно, то $Q_n := \operatorname{conv}(K_n \cup \omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$, образуют фундаментальную систему компактных подмножеств Q.*

Определение. Выпуклое множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ будем называть строго (соответственно $\mathbb{C}$-строго) выпуклым в $\partial_r\omega$, если пересечение Q с каждой опорной (соответственно комплексной опорной) гиперплоскостью к $\operatorname{cl} Q \subset \mathbb{C}^N$ компактно.

Замечание 2. (а) Если $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, то Q является строго выпуклым (соответственно, $\mathbb{C}$ — строго выпуклым) в $\partial_r\omega$ в том и только в том случае, когда всякий прямолинейный интервал в ω относительно компактен в ω (соответственно, всякий прямолинейный интервал в ω, $\mathbb{C}$-аффинная оболочка которого лежит в некоторой опорной гиперплоскости к $\operatorname{cl} Q$, относительно компактен в ω).

(б) Если $\operatorname{int} Q = \varnothing$, то $Q \subset \mathbb{C}^N$ строго выпукло в $\partial_r\omega$ тогда и только тогда, когда Q компактно.

(в) Каждое выпуклое множество $Q \subset \mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$-строго выпуклым.

(г) Пусть выпуклое множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ $\mathbb{C}$-строго выпукло в $\partial_r\omega$. По [12, лемма 3, доказательство теоремы 1.2] Q обладает базисом окрестностей, состоящим из линейно выпуклых открытых множеств, т. е. из открытых множеств, дополнение которых является объединением комплексных гиперплоскостей. Эти множества псевдовыпуклы [11, предложение 4.6.3], а, значит, являются областями голоморфности [6, теорема 4.2.8].

Лемма 3. *Выпуклое локально замкнутое множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ строго выпукло в $\partial_r\omega$ тогда и только тогда, когда семейство $CN(Q)$ всех открытых выпуклых окрестностей Q является базисом окрестностей Q.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ — открытая окрестность Q. Покажем, что существует $\Omega_0 \in CN(Q)$ такое, что $Q \subset \Omega_0 \subset \Omega$. Если внутренность Q пуста, то в силу строгой выпуклости Q в $\partial_r\omega$ множество Q компактно. В этом случае существование такого Ω_0 очевидно.

Пусть внутренность Q непуста. Для каждого $z \in \partial Q$ выберем опорную гиперплоскость R_z к $\operatorname{cl} Q$ в z и обозначим через P_z открытое полупространство с границей R_z, содержащее $\operatorname{int} Q$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $d_n := \operatorname{dist}(\omega_n, \partial\Omega) > 0$. Для $z \in \omega_n \backslash \omega_{n-1}$ ($\omega_0 := \varnothing$) пусть $A_z := P_z + d_n U$, где U — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^N$. Для $z \in (\partial Q) \backslash \omega$ пусть $A_z := P_z$. Из строгой выпуклости Q в $\partial_r\omega$ следует, что $Q \subset A_z$ для любого $z \in \partial Q$. Положим далее $\Omega_1 := \bigcap\limits_{z \in \partial Q} A_z$ и $\Omega_0 := \operatorname{int} \Omega_1$. Поскольку $\Omega_1 \subset (\operatorname{int} Q) \cup \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\omega_n + d_n U) \right)$, то выпуклая область Ω_0 содержится в Ω. Покажем, что $Q \subset \Omega_0$.

Очевидно, $\operatorname{int} Q \subset \Omega_0$. Пусть $z \in \omega_n \backslash \omega_{n-1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Как и в [12, лемма 1 в доказательстве теоремы 1.2]; при этом заменяем «комплексную опорную гиперплоскость» на «действительную опорную гиперплоскость», существует $m > n$ такое, что $c_m := \inf\limits_{w \in (\partial Q) \backslash \omega_m} \operatorname{dist}(z, R_w) > 0$ и поэтому $t_m := \min\{d_m, c_m\} > 0$. Отсюда следует, что $z + t_m U \subset \Omega_0$ и, значит, $z \in \Omega_0$.

$\Leftarrow$: Заметим вначале, что, если $N = 1$ и Q — некомпактный интервал в $\mathbb{R}$, $CN(Q)$ не является базисом окрестностей Q. (Например, пусть $Q = (a, b)$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Область $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < (\operatorname{Re} z - a)^2$ и $\operatorname{Re} z > a\}$ — окрестность Q. Так как для каждой точки $t \in \Omega$, для которой $\operatorname{Im} t \neq 0$, найдется точка $w \in Q$, достаточно близкая к a и такая, что отрезок $[w, t]$ не содержится в Ω, то не существует выпуклой окрестности Q, содержащейся в Ω.)

Предположим теперь, что Q не является строго выпуклым в $\partial_r\omega$. Тогда существует опорная гиперплоскость P к $\operatorname{cl} Q$ такая, что пересечение P с Q содержит прямолинейный интервал I, не являющийся относительно компактным в $P \cap Q$. После ортогонального преобразования пространства $\mathbb{R}^{2N} = \mathbb{C}^N$ мы можем предположить, что P — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^{2N} : x_1 = 0\}$, интервал I содержится в прямой $\{x \in \mathbb{R}^{2N} : x_1 = x_3 = \ldots = x_{2N} = 0\}$ и Q лежит в полупространстве $\{x \in \mathbb{R}^{2N} : x_1 \leqslant 0\}$. Положим $I_1 := Q \cap (\mathbb{R}I)$. Интервал I_1 не является компактным на прямой $\mathbb{R}I$.

По замечанию, с которого мы начали доказательство достаточности, I_1 не обладает базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей в плоскости $\mathbb{C}_1 := \{x \in \mathbb{R}^{2N} : x_3 = \ldots = x_{2N} = 0\}$. Выберем в $\mathbb{C}_1$ открытую окрестность D множества I_1 такую, что не существует открытой выпуклой окрестности V интервала I_1 в $\mathbb{C}_1$, для которой $V \subset D$. Найдется окрестность Ω множества Q в $\mathbb{R}^{2N}$ такая, что $\Omega \cap \mathbb{C}_1 = D$. По выбору D ни одна область $G \in CN(Q)$ не содержится в Ω. Достаточность доказана. $\rhd$

2. Пространство функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве. Оператор представления

Обозначения. В дальнейшем $Q \subset \mathbb{C}^N$ — выпуклое локально замкнутое множество с фундаментальной системой $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ компактных множеств в Q. Без ограничения общности можно считать, что $Q_n \subset Q_{n+1}$ и Q_n выпукло для любого $n \in \mathbb{N}$. Через $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ обозначим фундаментальную систему компактных подмножеств $\omega = Q \cap \partial_r Q$.

Для каждого выпуклого множества $D \subset \mathbb{C}^N$ через H_D мы обозначаем опорную функцию D, т. е. $H_D(z) := \sup\limits_{w \in D} \operatorname{Re}\langle z, w\rangle$, $z \in \mathbb{C}^N$. Положим $H_n := H_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ $E_{n,m} := A^\infty(Q_n + \frac{1}{m}U)$ обозначает пространство всех ограниченных аналитических в $Q_n + \frac{1}{m}U$ функций, снабженное топологией sup-нормы. Введем пространство $A(Q_n) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{n,m}$ всех функций, аналитических в некоторой открытой окрестности Q_n, $n \in \mathbb{N}$, и снабдим его естественной топологией индуктивного предела. Через $A(Q)$ обозначим векторное пространство всех функций, аналитических в некоторой открытой окрестности Q. Так как выполняется равенство $A(Q) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(Q_n)$ (см., например, [12, с. 63]), мы можем ввести в $A(Q)$ топологию проективного предела: $A(Q) := \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} A(Q_n)$. Эта топология не зависит от выбора фундаментальной системы $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ компактных множеств в Q. Если Q открыто, $A(Q)$ является пространством Фреше всех аналитических в Q функций.

Замечание 4. (а) Существует другой естественный способ введения топологии в $A(Q)$. Именно, в $A(Q)$ можно ввести топологию in индуктивного предела $\operatorname*{ind}_{\Omega} A(\Omega)$, где Ω пробегает все открытые окрестности Q. Эта топология мажорирует введенную выше топологию проективного предела pr.

По [12, предложение 1.7] следующие утверждения равносильны:

(i) топологии in и pr совпадают;

(ii) локально выпуклое пространство $(A(Q), \mathrm{pr})$ ультраборнологично;

(iii) $(A(Q), \mathrm{pr})$ борнологично.

(б) По [12, глава I, § 3, теорема 1.2] $A(Q)$ (т. е. $(A(Q), \mathrm{pr})$) ультраборнологично, например, в следующих трех случаях: если $N = 1$; если $Q \subset \mathbb{R}^N$, или, если $Q \subset \mathbb{C}^N$ $\mathbb{C}$-строго выпукло в $\partial_r\omega$ и внутренность Q непуста. В частности, $A(Q)$ ультраборнологично, если Q строго выпукло в $\partial_r\omega$.

(в) По [12, глава I, § 3, предложение 1.2] множества, ограниченные в $(A(Q), \mathrm{in})$ и $(A(Q), \mathrm{pr})$ — одни и те же. При этом, если множество B ограничено в этих пространствах, то B ограничено в $A(\Omega)$ для некоторой открытой окрестности Ω множества Q.

Для $n, m \in \mathbb{N}$ положим

$$A_{n,m} := \{f \in A(\mathbb{C}^N) : \|f\|_{n,m} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)| \exp(-H_n(z) - |z|/m) < \infty\}$$

и

$$A_{Q_n} := \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} A_{n,m}, \quad A_Q := \operatorname*{ind}_{n\rightarrow} A_{Q_n}.$$

Для локально выпуклого пространства E через E'_β обозначим сильное сопряженное к E пространство. Пусть $e_\lambda(z) := \exp\langle\lambda, z\rangle$, $\lambda, z \in \mathbb{C}^N$. Следующее утверждение доказано в [13, лемма 1.10].

Лемма 5. *Преобразование Лапласа*

$$\mathscr{F} : A(Q)' \to A_Q, \quad \mathscr{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

— топологический изоморфизм локально выпуклого пространства $A(Q)' := \operatorname*{ind}_{n\rightarrow} A(Q_n)'_\beta$ *на* A_Q*. При этом индуктивная топология в* $A(Q)'$ *равна сильной топологии и топологии Макки.*

Если отождествить с помощью преобразования Лапласа сопряженное к $A(Q)$ пространство с A_Q и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — естественная билинейная форма, устанавливающая двойственность между $A(Q)$ и A_Q, то $\langle e_\lambda, f\rangle = f(\lambda)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}^N$ и $f \in A_Q$.

Пространства последовательностей. Оператор представления. Для $k \in \mathbb{N}^N$ полагаем $|k| := \sum_{j=1}^{N} k_j$. Пусть $M \subset \mathbb{N}^N$ — бесконечное множество и $(\lambda_k)_{k\in M} \subset \mathbb{C}^N$ —

последовательность такая, что $|\lambda_k| \to \infty$ при $|k| \to \infty$. Для $n, m \in \mathbb{N}$ введем банаховы пространства числовых последовательностей

$$\Lambda_{n,m}(Q) := \left\{ c = (c_k)_{k\in M} \subset \mathbb{C} : \sum_{k\in M} |c_k| \exp\left(H_n(\lambda_k) + \frac{|\lambda_k|}{m} \right) < \infty \right\},$$
$$K_{n,m}(Q) := \left\{ c = (c_k)_{k\in M} \subset \mathbb{C} : \sup_{k\in M} |c_k| \exp\left(-H_n(\lambda_k) - \frac{|\lambda_k|}{m} \right) < \infty \right\}$$

и положим

$$\Lambda_1(Q_n) := \operatorname*{ind}_{m\to} \Lambda_{n,m}(Q), \quad \Lambda_1(Q) := \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} \Lambda_1(Q_n), \quad K_\infty(Q) := \operatorname*{ind}_{n\to} \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} K_{n,m}(Q).$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{k\in M} c_k e_{\lambda_k}$ абсолютно сходится в $A(Q)$ тогда и только тогда, когда $c \in \Lambda_1(Q)$ [3, глава I, § 1, 9].

Оператор представления $R(c) := \sum\limits_{k\in M} c_k e_{\lambda_k}$ линейно и непрерывно отображает $\Lambda_1(Q)$ в $A(Q)$.

Если $R : \Lambda_1(Q) \to A(Q)$ сюръективен, то, следуя Ю. Ф. Коробейнику, мы называем $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$ *абсолютно представляющей системой* (АПС) в $A(Q)$.

Пусть $e_k := (\delta_{k,m})_{m\in M}$, $k \in M$, где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера.

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Преобразование $\varphi \mapsto (\varphi(e_k))_{k\in M}$ — топологический изоморфизм локально выпуклого пространства $\Lambda_1(Q)' := \operatorname*{ind}_{n\to} \Lambda_1(Q_n)'_\beta$ на $K_\infty(Q)$. Индуктивная топология в $\Lambda_1(Q)'$ совпадает с сильной и с топологией Макки.*

Двойственность между $\Lambda_1(Q)$ и $K_\infty(Q)$ определяется билинейной формой $\langle c, d\rangle := \sum\limits_{k\in M} c_k d_k$.

(ii) *Сопряженное к $R : \Lambda_1(Q) \to A(Q)$ отображение $R' : A_Q \to K_\infty(Q)$ — оператор сужения $f \mapsto (f(\lambda_k))_{k\in M}$.*

(iii) *Оператор R имеет правый обратный тогда и только тогда, когда R' имеет левый обратный.*

$\lhd$ (i): Так как множество всех ортов $\{e_k : k \in M\}$ полно в $\Lambda_1(Q_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то выполняется алгебраическое равенство $\Lambda_1(Q)' = \operatorname*{ind}_{n\to}(\Lambda_1(Q_n))'_\beta$. Поэтому утверждение (i) следует из того, что отображение $\varphi \mapsto (\varphi(e_k))_{k\in M}$ является топологическим изоморфизмом $\Lambda_1(Q_n)'_\beta$ на $\operatorname*{proj}_{\leftarrow m} K_{n,m}(Q)$ [9, 2.7]. Вследствие рефлексивности $\Lambda_1(Q_n)$ и [7, глава IV, 4.4] топология Макки в $\Lambda_1(Q)'$ совпадает с (LF)-топологией и с сильной.

(ii): Вытекает их равенств

$$\langle c, R'(f)\rangle = \langle R(c), f\rangle = \sum_{k\in M} c_k \langle e_{\lambda_k}, f\rangle = \sum_{k\in M} c_k f(\lambda_k), \quad c \in \Lambda_1(Q),\ f \in A_Q.$$

(iii): Если S — правый обратный к $R : \Lambda_1(Q) \to A(Q)$, то в силу лемм 5 и 6 сопряженный к S оператор S' непрерывен из A_Q в $K_\infty(Q)$ и является левым обратным к R'.

По лемме 5 $A(Q)'_\beta \cong A_Q$, а по (i) $\Lambda_1(Q)'_\beta \cong K_\infty(Q)$. Если $\kappa\colon K_\infty(Q) \to A_Q$ — левый обратный к R', то по факторизационной теореме Гротендика для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $n' \in \mathbb{N}$ такое, что индуцированное отображение $\kappa_n\colon \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} K_{n,m}(Q) \to \operatorname*{proj}_{\leftarrow m} A_{n',m}$ непрерывно. Так как локально выпуклые пространства $\Lambda_1(Q_n)$ и $A(Q_{n'})$ рефлексивны, то сопряженные отображения $\kappa_n' \colon A(Q_{n'}) \to \Lambda_1(Q_n)$ индуцируют линейный непрерывный оператор $S \colon A(Q) \to \Lambda_1(Q)$ такой, что сужение S на $A(Q_{n'})$ совпадает с κ_n' и $(R \circ S)' = \kappa \circ R' = \mathrm{id}_{A_Q}$. Поэтому $S = \kappa'$ — правый обратный к R. $\rhd$

Замечание 7. Пусть Q строго выпукло в $\partial_r \omega$.

(а) По лемме 3 Q обладает фундаментальной системой $CN(Q)$ окрестностей, состоящей из выпуклых областей. По замечанию 4 топология $A(Q)$ совпадает с топологией индуктивного предела $\operatorname*{ind}_{G \in CN(Q)} A(G)$. Поскольку по лемме 5 преобразование Лапласа $\mathscr{F}$ — топологический изоморфизм $A(Q)'_\beta$ на A_Q и по замечанию 4 (в) каждое ограниченное в $A(Q)$ множество ограничено в $A(G)$ для некоторого $G \in CN(Q)$, по [7, глава IV, замечание 4.5] $\mathscr{F}$ является топологическим изоморфизмом $A(Q)'_\beta$ на $\operatorname*{proj}_{G \in CN(Q)} A_G$. Отсюда следует, что равенство $A_Q = \operatorname*{proj}_{G \in CN(Q)} A_G$ выполняется алгебраически и топологически.

(б) Пусть $\lim\limits_{|k| \to \infty} \frac{\log |k|}{|\lambda_k|} = 0$. Ясно, что $\bigcup\limits_{G \in CN(Q)} \Lambda_1(G) \subset \Lambda_1(Q)$. Пусть $c \in \Lambda_1(Q)$. По замечанию 4 (в) множество $\{c_k e_{\lambda_k} : k \in M\}$ ограничено в $A(G)$ для некоторой области $G \in CN(Q)$. Из условия $\lim\limits_{|k| \to \infty} \frac{\log |k|}{|\lambda_k|} = 0$ следует, что ряд $\sum\limits_{k \in M} \exp(-\varepsilon|\lambda_k|)$ сходится для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $c \in \Lambda_1(G)$. Значит, $\Lambda_1(Q) \subset \bigcup\limits_{G \in CN(Q)} \Lambda_1(G)$ и $\Lambda_1(Q) = \bigcup\limits_{G \in CN(Q)} \Lambda_1(G)$. Кроме того, топология $\operatorname*{ind}_{G \in CN(Q)} \Lambda_1(G)$ мажорирует топологию $\Lambda_1(Q)$.

По [7, 4.5] сопряженное пространство $\left(\operatorname*{ind}_{G \in CN(Q)} \Lambda_1(G)\right)'$ можно алгебраически отождествить с $\operatorname*{proj}_{G \in CN(Q)} K_\infty(G)$.

3. Условия сюръективности оператора представления

Докажем вначале, что необходимым условием сюръективности R (при дополнительных предположениях о Q в многомерной ситуации и росте $|\lambda_k|$) является строгая выпуклость Q в $\partial_r \omega$.

Теорема 8. *Пусть Q обладает базисом $\mathscr{H}$ окрестностей, состоящим из областей голоморфности и $\lim\limits_{|k| \to \infty} \frac{\log |k|}{|\lambda_k|} = 0$. Если оператор представления $R : \Lambda_1(Q) \to A(Q)$ сюръективен, то Q строго выпукло в $\partial_r \omega$.*

$\lhd$ Пусть $G \in \mathscr{H}$ и $f \in A(G)$. Выберем $c \in \Lambda_1(Q)$ так, что $R(c) = f$. Так как множество $\{c_k e_{\lambda_k}\}_{k \in M}$ ограничено в $A(Q)$, оно ограничено в $A(D)$ для некоторой области D такой, что $Q \subset D$ (см. замечание 4). Так как $\lim\limits_{|k| \to \infty} \frac{\log |k|}{|\lambda_k|} = 0$, ряд $\sum\limits_{k \in M} c_k e_{\lambda_k}$ абсолютно сходится в $A(D)$. Тогда этот ряд абсолютно сходится и в $A(\mathrm{conv}(D))$ к функции $F \in A(\mathrm{conv}(D))$ (как и в [5, глава III, § 1], это следует из неравенства $a^t b^{1-t} \leqslant \max\{a, b\}$ для $a, b \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$). Поэтому сужения функций F и f на $G \cap \mathrm{conv}(D)$ совпадают. Поскольку G — область голоморфности, то $\mathrm{conv}(D) \subset G$. $\rhd$

Из теоремы 8 и замечания 2 (г) вытекает

Следствие 9. *Пусть Q $\mathbb{C}$-строго выпукло в $\partial_r \omega$* (это так, например, если $N = 1$) *и $\lim\limits_{|k| \to \infty} \frac{\log |k|}{|\lambda_k|} = 0$. Если оператор представления $R : \Lambda_1(Q) \to A(Q)$ сюръективен, то Q строго выпукло в $\partial_r \omega$.*

Следствие 10. *Пусть Q — выпуклое открытое подмножество $\mathbb{R}^N$. В пространстве $A(Q)$ вещественно аналитических функций не существует абсолютно представляющей системы экспонент $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$ такой, что M — бесконечное подмножество $\mathbb{N}^N$ и* $\lim\limits_{|k|\to\infty}\frac{\log|k|}{|\lambda_k|}=0.$

$\lhd$ По лемме Картана [10, предподожение 1] Q обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности. Поскольку Q не является строго выпуклым в $\partial_r\omega$, то по теореме 8 в $A(Q)$ не существует абсолютно представляющей системы $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$ такой, что M — бесконечное подмножество $\mathbb{N}^N$ и $\lim\limits_{|k|\to\infty}\frac{\log|k|}{|\lambda_k|}=0$. $\rhd$

Чтобы получить достаточные условия сюръективности оператора представления, определим некоторые геометрические свойства выпуклых компактов в $\mathbb{C}^N$ и приведем информацию о слабо достаточных множествах. Эти множества введены Шнайдером [14].

Обозначения. Пусть $S:=\{z\in\mathbb{C}^N:\,|z|=1\}$. Для выпуклого множества $D\subset\mathbb{C}^N$, $\gamma\subset D$ и $\sigma\subset S$ определим следующие множества «опорных направлений» и опорных точек:

$$S_\gamma(D):=\{a\in S:\,\mathrm{Re}\langle w,a\rangle=H_D(a)\text{ для некоторого }w\in\gamma\},$$
$$F_\sigma(D):=\{w\in D:\,\mathrm{Re}\langle w,a\rangle=H_D(a)\text{ для некоторого }a\in\sigma\}.$$

Будем писать $S_\gamma:=S_\gamma(Q)$, $F_\sigma:=F_\sigma(Q)$, $S_0:=S\backslash S_\omega$.

Отметим, что, если множество $\gamma\subset D$ компактно, то и $S_\gamma(D)$ компактно. Если компактны множества $\sigma\subset S$ и D, то $F_\sigma(D)$ тоже компактно.

Определение. (а) Пусть $B\subset S$ и K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^N$; для $\sigma\subset S$ $\hat\sigma:=S_{F_\sigma(K)}(K)$. Назовем K *гладким в направлениях* B, если для каждой точки $b\in B$ компактное множество $\{\hat b\}:=S_{F_{\{b\}}(K)}(K)$ содержится в B.

Заметим, что K гладкий в направлениях любого множества $B\subset S$, если ∂K класса C^1.

Так как для каждого множества $\kappa\subset B$ выполняется равенство $\hat\kappa=\bigcup\limits_{b\in\kappa}\widehat{\{b\}}$, то K гладкий в направлениях B в том и только в том случае, когда для каждого множества $\kappa\subset B$ множество $\hat\kappa$ также содержится в B.

(б) Выпуклое компактное множество $K\subset\mathbb{C}^N$ назовем *невырожденным в направлениях* $B\subset S$, если K не содержится в опорной гиперплоскости $\{z\in\mathbb{C}^N:\,\mathrm{Re}\langle z,a\rangle=H_K(a)\}$ к множеству K для любого $a\in B$.

Заметим, что K невырожденный в направлениях S, если $\mathrm{int}\,K\neq\varnothing$.

Отметим связь между введенными ранее понятиями строгой выпуклости и гладкости в направлениях.

Замечание 11. Пусть выпуклый компакт $K\subset\mathbb{C}^N$ содержит 0 в своей внутренности и $B\subset S$ открыто (в S). K является гладким в направлениях B в том и только в том случае, когда выпуклое множество $K':=\mathrm{int}\,K^0\cup\omega'$ строго выпукло в $\partial_r\omega'$, где $\omega':=\partial K^0\cap\Gamma(B)$, $K^0:=\{z\in\mathbb{C}^N\,|\,H_K(z)\leqslant1\}$, $\Gamma(B):=\{tb:\,b\in B,\,t\geqslant0\}$.

$\lhd$ Предположим, что K' не является строго выпуклым в $\partial_r\omega'$. Тогда существует опорная гиперплоскость $R_a:=\{z\in\mathbb{C}^N:\,\mathrm{Re}\langle z,a\rangle=H_{K^0}(a)\}$, $a\in S$, к K^0 такая, что $R_a\cap\omega'$ содержит прямолинейный интервал $[z_1,z_2)$ такой, что $z_2\notin\omega'$. Точка $\tilde a:=(H_{K^0}(a))^{-1}a$ принадлежит ∂K и для $b_j:=|z_j|^{-1}z_j\in S$, $j=1,2$, учитывая равенства $H_K(z_j)=1$, получим $\mathrm{Re}\langle b_j,\tilde a\rangle=H_K(b_j)$. Значит, $\tilde a\in F_{\{b_1\}}(K)$ и $b_2\in\widehat{\{b_1\}}$. Так как $b_1\in B$ и $b_2\notin B$, множество K не является гладким в направлениях B.

Наоборот, пусть K не является гладким в направлениях B. Тогда для некоторого $b\in B$ найдется $b_0\in\widehat{\{b\}}\backslash B$. Выберем $z\in F_{\{b\}}(K)$ так, что $\mathrm{Re}\langle z,b_0\rangle=H_K(b_0)$. Так как $z\in$

$F_{\{b\}}(K)$, то $\operatorname{Re}\langle z, b\rangle = H_K(b)$ и точки $\tilde{b}_0 := (H_K(b_0))^{-1}b_0$, $\tilde{b} := (H_K(b))^{-1}b$ принадлежат ∂K^0. При этом $\tilde{b} \in \omega'$, $\tilde{b}_0 \notin \omega'$. Поскольку $\operatorname{Re}\langle z, \tilde{b}_0\rangle = H_{K^0}(z) = 1$ и $\operatorname{Re}\langle z, \tilde{b}\rangle = H_{K^0}(z) = 1$, то K' не является строго выпуклым в $\partial_r\omega'$. $\rhd$

Слабо достаточные множества. Пусть $h_n : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ — возрастающая последовательность локально ограниченных функций. Определим банаховы пространства

$$A_{h_n} := \{f \in A(\mathbb{C}^N) : \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)| \exp(-h_n(z)) < \infty\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и $A_{(h_n)} := \operatorname*{ind}_{n\to} A_{h_n}$.

Для множества $\Lambda \subset \mathbb{C}^N$ введем нормированные пространства

$$A_{h_k}(\Lambda) := \left\{f \in A_{(h_n)} : \sup_{z\in\Lambda} |f(z)| \exp(-h_k(z)) < \infty\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и положим $A_{(h_k)}(\Lambda) := \operatorname*{ind}_{k\to} A_{h_k}(\Lambda)$.

Множество $\Lambda \subset \mathbb{C}^N$ называется *слабо достаточным* для $A_{(h_n)}$ [14], если топология $A_{(h_n)}$ равна топологии $A_{(h_n)}(\Lambda)$.

Замечание 12. (а) Предположим, что $\lim\limits_{|z|\to\infty}(h_{n+1}(z) - h_n(z)) = +\infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, множество $M \subset \mathbb{N}^N$ бесконечно и $(\lambda_k)_{k\in M}$ — последовательность в $\mathbb{C}^N$ такая, что $\lim\limits_{|k|\to\infty} |\lambda_k| = \infty$. Положим $K_\infty((h_n)) := \operatorname*{ind}_{n\to} K_\infty(h_n)$, где банахово пространство $K_\infty(h_n)$ определено так:

$$K_\infty(h_n) := \left\{(c_k)_{k\in M} \subset \mathbb{C} : \sup_{k\in M} |c_k| \exp(-h_n(\lambda_k)) < \infty\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Множество $(\lambda_k)_{k\in M}$ слабо достаточно для $A_{(h_n)}$ в том и только в том случае, когда отображение $f \mapsto (f(\lambda_k))_{k\in M}$ является топологическим изоморфизмом $A_{(h_n)}$ в $K_\infty((h_n))$ [4, § 4].

(б) По [3, глава I, § 1.7] (см. также [4, § 8]) для каждой выпуклой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^N$ множество $(\lambda_k)_{k\in M}$ такое, что $|\lambda_k| \to \infty$ при $|k| \to \infty$, слабо достаточно для A_D в том и только в том случае, когда $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$ — абсолютно представляющая система в $A(D)$.

Положим $H_A(z) := \sup\limits_{t\in A} \operatorname{Re}\langle t, z\rangle$, $z \in \mathbb{C}^N$, для произвольного ограниченного множества $A \subset \mathbb{C}^N$.

Лемма 13. *Пусть ограниченное локально замкнутое множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ строго выпукло в $\partial_r\omega$ и K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^N$.*

(i) *Если $D \subset \mathbb{C}^N$ — выпуклый компакт такой, что $H_D \leqslant H_K$ на S и $H_D < H_K$ на S_ω, то существует выпуклая окрестность G множества Q, для которой $H_G \leqslant H_Q + H_K - H_D$ на S.*

(ii) *Если компакт K гладкий и невырожденный в направлениях S_ω, то для любой выпуклой окрестности G множества Q существует выпуклый компакт $D \subset \mathbb{C}^N$ такой, что $H_D \leqslant H_K$ и $H_Q + H_K - H_G \leqslant H_D$ на S и $H_D < H_K$ на S_ω.*

$\lhd$ (i): Пусть $a_n := \inf\{H_K(t) - H_D(t) : t \in S_{\omega_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $z \in \partial Q$ через $\mathscr{R}_z$ обозначим множество всех опорных гиперплоскостей R_z к $\operatorname{cl} Q$ в z. Для $z \in \partial Q$ и $R_z \in \mathscr{R}_z$ пусть P_z — открытое полупространство с границей R_z, для которого $\operatorname{int} Q \subset P_z$. Если $z \in \omega_n \backslash \omega_{n-1}$ ($\omega_0 := \varnothing$), положим $B_z := \bigcap\limits_{R_z\in\mathscr{R}_z} (P_z + a_nU)$.

Если $z \in (\partial Q)\backslash\omega$, то $B_z := \bigcap\limits_{R_z \in \mathscr{R}_z} P_z$. Как и при доказательстве леммы 3, получим, что $G := \operatorname{int}\left(\bigcap\limits_{z\in\partial Q} B_z\right)$ является выпуклой окрестностью Q. Из конструкции G вытекает, что $H_G \leqslant H_Q + H_K - H_D$ на S.

(ii): Без ограничения общности можно предположить, что $0 \in \operatorname{int}_r K$. Тогда $H_K > 0$ на S_ω. Положим $\gamma_0 := F_{S_0}(K)$, $\gamma_n := F_{S_{\omega_n}\backslash S_{\omega_{n-1}}}(K)$, $\Gamma_n := F_{S_{\omega_n}}(K)$, $b_n := \sup\limits_{a\in S_{\omega_n}} H_K(a)$, $n \in \mathbb{N}$ ($S_0 := S\backslash S_\omega$, $\omega_0 := \varnothing$). Так как $c_n := \inf\limits_{a\in S_{\omega_n}} (H_G(a) - H_Q(a)) > 0$, то существует $\delta_n \in (0,1)$ такое, что $(1-\delta_n)b_n < c_n$. При этом мы можем выбрать δ_n так, что $\delta_n < \delta_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для $D_0 := \operatorname{conv}\left(\gamma_0 \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\gamma_n\right)\right)$ выполняется равенство $H_{D_0} = \max\{H_{\gamma_0}; \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\delta_n H_{\gamma_n})\}$. Ясно, что $H_{D_0} = H_{\gamma_0} = H_K$ на S_0.

Пусть $a \in S_{\omega_n}$. По лемме 3.5 [13] $(S_{\omega_k})_{k\in\mathbb{N}}$ — компактное исчерпывание S_ω (и S_ω открыто в S). Поэтому найдется $m > n$ такое, что $S_{\omega_n} \subset \operatorname{int}_r S_{\omega_m}$ и, следовательно, $H_K(a) > H_{(\partial_r K)\backslash\Gamma_m}(a)$. Кроме того, вследствие $\widehat{S_{\omega_m}} \subset S_\omega$ и $S_{\gamma_0} \subset S_0$, имеем: $\gamma_0 \cap \Gamma_m = \varnothing$. Это влечет:

$$H_{D_0}(a) \leqslant \max\left\{H_{(\partial_r K)\backslash\Gamma_m}(a); \delta_m H_{\Gamma_m}(a)\right\} < H_K(a).$$

Поэтому на S_ω выполняется строгое неравенство $H_{D_0} < H_K$.

Для $a \in S_{\omega_n}\backslash S_{\omega_{n-1}}$ ($S_{\omega_0} := \varnothing$)

$$H_K(a) - H_{D_0}(a) \leqslant H_K(a) - \delta_n H_{\gamma_n}(a) = (1-\delta_n)H_K(a) \leqslant (1-\delta_n)b_n \leqslant H_G(a) - H_Q(a).$$

Поэтому $H_Q + H_K - H_G \leqslant H_{D_0}$ на S_ω. В качестве D возьмем $D := \operatorname{cl} D_0$. $\rhd$

Приводимые ниже достаточные условия сюръективности оператора представления R — некоторое свойство внутрь-продолжаемости абсолютно представляющих систем экспонент.

Теорема 14. *Пусть ограниченное выпуклое локально замкнутое множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ строго выпукло в $\partial_r\omega$ и внутренность Q непуста. Предположим, что выпуклый компакт $K \subset \mathbb{C}^N$ гладкий и невырожденный в направлениях S_ω. Если система $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$, для которой $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\log|k|}{|\lambda_k|} = 0$, является АПС в $A(\operatorname{int} Q + K)$, то она является АПС и в $A(Q)$.*

$\lhd$ Зафиксируем возрастающую последовательность $\delta_n > 0$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 1$. Пусть $CN(Q)$ — семейство всех выпуклых открытых окрестностей Q. Возьмем $\Omega \in CN(Q)$. По лемме 13 существуют выпуклый компакт $D \subset \mathbb{C}^N$ и $G \in CN(Q)$ такие, что $H_G \leqslant H_Q + H_K - H_D \leqslant H_\Omega$ на $\mathbb{C}^N$. Положим $h_n := \delta_n H_Q + H_K - H_D$, $n \in \mathbb{N}$. По замечанию 11 (б) $(\lambda_k)_{k\in M}$ — слабо достаточное множество для $A_{\operatorname{int} Q+K} = A_{(\delta_n H_Q + H_K)}$. Так как функция H_D плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^N$ и $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}^N, |t|\leqslant 1} |H_D(z+t) - H_D(z)| < \infty$, по [1, § 2, теорема 1] $(\lambda_k)_{k\in M}$ — слабо достаточное множество и для $A_{(h_n)}$. Для каждой выпуклой открытой окрестности Ω множества Q выберем последовательность $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, как выше, и обозначим через $\mathscr{H}$ семейство всех выбранных последовательностей $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. По замечанию 7 (а) и вследствие выбора $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ выполняется (алгебраическое и топологическое) равенство $A_Q = \operatorname{proj}\limits_{(h_n)\in\mathscr{H}} A_{(h_n)}$. По замечанию 7 (б) пространство $\Lambda_1(Q)$ алгебраически совпадает с $M_1 := \operatorname{ind}\limits_{G\in CN(Q)} \Lambda_1(G)$. Кроме того, топология M_1 мажорирует топологию $\Lambda_1(Q)$ и $(M_1)'$ можно алгебраически отождествить с $\widehat{M_1} := \operatorname{proj}\limits_{G\in CN(Q)} K_\infty(G)$.

Заметим, что локально выпуклые пространства $\widehat{M_1}$ и $\operatorname*{proj}_{(h_n)\in\mathscr{H}} K_\infty((h_n))$ совпадают. Зафиксируем $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{H}$. Пространства $A_{(h_n)}$ и $K_\infty((h_n))$ рефлексивны. Так как множество $(\lambda_k)_{k\in M}$ слабо достаточно для $A_{(h_n)}$, то по замечанию 12 (б) R' — топологический изоморфизм $A_{(h_n)}$ в $K_\infty((h_n))$. По [8, 8.6.14, 8.6.13] R' является слабым изоморфизмом $A_{(h_n)}$ в $K_\infty((h_n))$. Из [7, 4.5] вытекает, что R' — слабый изоморфизм A_Q в $\widehat{M_1}$. По [8, 8.6.4] оператор $R : M_1 \to A(Q)$ сюръективен, т. е. $(e_{\lambda_k})_{k\in M}$ — абсолютно представляющая система в $A(Q)$. $\triangleright$

Литература

1. *Абанин А. В.* О продолжении и устойчивости слабо достаточных множеств // Изв. вузов. Математика.—1987.—№ 4.—С. 3–10.
2. *Коробейник Ю. Ф., Леонтьев А. Ф.* О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент // Мат. заметки.—1980.—Т. 28, вып. 28.—С. 243–253.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. математика.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
6. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.—М.: Мир, 1968.—280 с.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
8. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
9. *Bierstedt K.-D., Meise R., Summers W. H.* Köthe sets and Köthe sequence spaces // Funct. Anal., Holomorphy and Approximation Theory, J. A. Barroso (ed.).—North-Holland Publishing Company, 1982.—P. 28–91.
10. *Cartan H.* Variétés analytiques réeles et variétés analytiques complexes // Bull. Soc. Math. France.—1957.—Bd. 85.—S. 77–100.
11. *Hörmander L.* Notions of Convexity.—Boston etc.: Birkhäuser, 1994.—414 s.
12. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Annal.—1966.—V. 163.—P. 62–88.
13. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—V. 86.—P. 293–319.
14. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—V. 197.—P. 161–180.

Статья поступила 17 декабря 2007 г.

Мелихов Сергей Николаевич
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: `melih@ms.math.rsu.ru`

Момм Зигфрид
Математический институт
Университета Дюссельдорфа
Дюссельдорф, 40225, ФРГ
E-mail: `momm@math.uni-duesseldorf.de`