Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, выпуск 4, С. 10–16

УДК **517.547.2+517.982**

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ПРОСТРАНСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАВАЕМОГО НЕРАДИАЛЬНЫМ ДВУЧЛЕННЫМ ВЕСОМ

А. В. Абанин

Посвящается столетию со дня рождения академика С. Л. Соболева

Дается описание класса мультипликаторов пространства целых функций, задаваемого нерадиальным двучленным весом. Приводится функциональный критерий замкнутости образа оператора умножения на фиксированный нетривиальный мультипликатор в таких пространствах.

Ключевые слова: оператор умножения, мультипликатор, целая функция.

1. Введение

Пусть u и v — неотрицательные возрастающие на $[0,\infty)$ функции, растущие на бесконечности быстрее $\ln t$. Полагаем $u(z) := u(|z|)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $v(x) := v(|x|)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. По u и v и числам r и s из $(0,\infty)$ определим банахово пространство целых в $\mathbb{C}$ функций

$$H_{ru,\,sv} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ \|f\|_{ru,\,sv} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{ru(\operatorname{Re} z)+sv(\operatorname{Im} z)}} < \infty \right\}.$$

При фиксированных p и q из $(0,\infty]$ введем линейное пространство

$$H_{u,\,v}^{p,\,q} := \bigcup_{r<p,\,s<q} H_{ru,\,sv}$$

и наделим его топологией внутреннего индуктивного предела семейства $\{H_{ru,sv} : r < p, s < q\}$.

Пространства такого вида играют значительную роль в теории распределений Шварца, ее обобщениях и приложениях. Это связано с тем, что для ряда пространств Фреше E бесконечно дифференцируемых функций преобразование Фурье — Лапласа функционалов

$$\mathscr{F} :\ \varphi \in E' \longmapsto \hat{\varphi}(z) := \varphi(e^{-iz\cdot}), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным с E пространством E'_b и $H_{u,\,v}^{p,\,q}$ при подходящем выборе u, v, p и q. В частности, при $u(t) = \ln(1+t)$, $v(t) = t$ и $p = q = \infty$ последнее утверждение следует из теоремы Пэли — Винера — Шварца, а для других u, v, p и q из ее аналогов [1–6].

Заметим, что при $p = q = \infty$ пространство $H^{\infty,\infty}_{u,v}$ является алгеброй относительно операций поточечного сложения и умножения функций. Поэтому для $H^{\infty,\infty}_{u,v}$ имеет смысл исследовать задачу об описании замкнутых главных идеалов. Напомним, что главным идеалом этой алгебры, натянутым на элемент $\mu \in H^{\infty,\infty}_{u,v}$, называется идеал вида $I_\mu := \{\mu f : \ f \in H^{\infty,\infty}_{u,v}\}$. В радиальном случае, когда $u = v$, каждый главный идеал замкнут в $H^{\infty,\infty}_{u,v}$ [7, предложение 4]. При отказе от радиальности последнее утверждение не всегда верно. Поэтому имеет смысл рассмотреть задачу об описании всех замкнутых идеалов в $H^{\infty,\infty}_{u,v}$ при условии, когда имеется существенная нерадиальность, состоящая в предположении, что $u(t) = o(v(t))$ при $t \to \infty$. Она рассматривалась Л. Эренпрайсом [8], Р. Майзе, Б. А. Тейлором и Д. Фогтом [9] для конкретных u и $v(t) = t$. Наиболее общие результаты были получены З. Моммом в [10]. Он дал полное описание замкнутых главных идеалов алгебры $H^{\infty,\infty}_{u,v}$ при условии, что v — выпуклая на $[0, \infty)$ функция, и что на бесконечности имеют место следующие асимптотические равенства:

$$\ln t = o(u(t)); \tag{1}$$

$$u(2t) = O(u(t)); \tag{2}$$

$$v(2t) = O(v(t)); \tag{3}$$

$$u(t) = o(v(t)). \tag{4}$$

В настоящей работе при тех же ограничениях, что и в [10], и дополнительном требовании о том, что $u(e^x)$ — выпуклая на $\mathbb{R}$ функция, исследуются те же, что и в [10], вопросы для пространства $H^{\infty,q}_{u,v}$, где $0 < q < \infty$. Это пространство уже не является алгеброй. Поэтому аналог задачи о главных идеалах выглядит для него следующим образом. Рассмотрим оператор $\Lambda_\mu : \ f \mapsto \mu f$ умножения на фиксированную целую функцию μ. Требуется установить, когда образ пространства $H^{\infty,q}_{u,v}$ относительно отображения Λ_μ замкнут в $H^{\infty,q}_{u,v}$. Ясно, что прежде, чем изучать замкнутость $\mu \cdot H^{\infty,q}_{u,v}$, следует дать описание всех тех целых функций μ, для которых $\mu \cdot H^{\infty,q}_{u,v} \subset H^{\infty,q}_{u,v}$ (другими словами, мультипликаторов $H^{\infty,q}_{u,v}$). Именно этим двум вопросам и посвящено основное содержание работы. Кроме того, приводятся приложения к задаче о сюръективности оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых на интервале функций типа Берлинга.

2. Пространства

Отметим некоторые нужные для последующих доказательств свойства пространств $H^{\infty,q}_{u,v}$ (всюду $q < \infty$). Из того, что $u(t) \to \infty$ и $v(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ стандартным образом следует, что если $r_1 < r_2$ и $s_1 < s_2$, то $H_{r_1 u,\, s_1 v}$ компактно вложено в $H_{r_2 u,\, s_2 v}$. Ясно также, что в задании пространства $H^{p,q}_{u,v}$ и топологии в нем при произвольных p и q можно ограничиться произвольными последовательностями $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, возрастая стремящимися к p и q соответственно. Поэтому $H^{p,q}_{u,v}$ и, в частности, $H^{\infty,q}_{u,v}$ по топологической структуре является (DFS)-пространством, т. е. сильным сопряженным к пространству класса Фреше — Шварца (по поводу (DFS)-пространств см. [11]). Заметим еще, что из условий (2) и (4) следует, что в определении $H^{\infty,q}_{u,v}$ вместо $H_{ru,\, sv}$ можно взять пространства

$$\widetilde{H}_{ru,\, sv} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ |f|_{ru,\, sv} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{ru(z) + sv(\operatorname{Im} z)}} < \infty \right\}.$$

В самом деле, положим $\widetilde{H}^{p,\,q}_{u,\,v} := \bigcup_{r<p,\,s<q} \widetilde{H}_{ru,\,sv}$ и наделим это линейное пространство топологией внутреннего индуктивного предела семейства банаховых пространств $\{\widetilde{H}_{ru,\,sv} : \; r<p, \; s<q\}$. Так как u возрастает, то $u(\operatorname{Re} z) \leqslant u(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому $H_{ru,\,sv} \hookrightarrow \widetilde{H}_{ru,\,sv}$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения). Тем более, $H^{p,\,q}_{u,\,v} \hookrightarrow \widetilde{H}^{p,\,q}_{u,\,v}$ для произвольных p и q из $(0,\infty]$. Далее, пусть $r<\infty$ и $s<q<\infty$. В силу возрастания u и условия (2) найдется такое r_1, $r<r_1<\infty$, что при всех $z \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
ru(z) &\leqslant ru(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leqslant ru(2\max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|)) \\
&\leqslant r_1(u(\max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|)) + 1) \leqslant r_1(u(\operatorname{Re} z) + u(\operatorname{Im} z) + 1).
\end{aligned}
$$

Возьмем s_1 так, чтобы $s<s_1<q$. Из (4) следует, что существует такое $C>0$, что $u(t) \leqslant \frac{s_1-s}{r_1}\, v(t) + C$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда для любых $z \in \mathbb{C}$

$$
ru(z) + sv(\operatorname{Im} z) \leqslant u_1(\operatorname{Re} z) + s_1 v(\operatorname{Im} z) + (C+1)r_1.
$$

Поэтому $|f|_{r_1u,\,s_1v} \leqslant e^{(C+1)r_1}\|f\|_{ru,\,sv}$ для произвольной целой функции f. Значит, $\widetilde{H}_{ru,\,sv} \hookrightarrow H_{r_1u,\,s_1v}$. Отсюда следует, что $\widetilde{H}^{\infty,\,q}_{u,\,v} \hookrightarrow H^{\infty,\,q}_{u,\,v}$, откуда заключаем окончательно, что $H^{\infty,\,q}_{u,\,v}$ совпадает с $\widetilde{H}^{\infty,\,q}_{u,\,v}$ поэлементно и топологически.

3. Мультипликаторы

Напомним, что целая функция μ называется *мультипликатором* некоторого множества H целых функций, если $\mu \cdot H \subset H$, где $\mu \cdot H := \{\mu f : \; f \in H\}$. Класс всех мультипликаторов H обозначим символом $M(H)$. В случае, когда дополнительно известно, что H — локально выпуклое пространство, мультипликатор μ называется непрерывным, если оператор умножения Λ_μ действует непрерывно из H в H. Нетрудно видеть, что если при этом топология H мажорирует топологию поточечной сходимости в $\mathbb{C}$, для H имеет место теорема о замкнутом графике и H является ультраборнологическим пространством, то каждый мультипликатор H будет непрерывным. Действительно, пусть сеть $(f_\alpha, \mu f_\alpha)_{\alpha\in A}$ сходится в $H \times H$ к элементу (f,g). Тогда, так как топология H мажорирует топологию поточечной сходимости в $\mathbb{C}$, то

$$
g(z) = \lim_{\alpha} \mu(z)\, f_\alpha(z) = \mu(z)\, f(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.
$$

Значит, график оператора Λ_μ замкнут. Из того, что топология H мажорирует топологию поточечной сходимости в $\mathbb{C}$, следует еще, что H отделимо. Таким образом, Λ_μ — линейный оператор, действующий из пространства H, для которого по предположению справедлива теорема о замкнутом графике, в отделимое ультраборнологическое пространство H и имеющий замкнутый график. Поэтому $\Lambda_\mu : H \to H$ непрерывен.

Вернемся к пространствам вида $H^{p,\,q}_{u,\,v}$. Легко видеть, что топология $H^{p,\,q}_{u,\,v}$ мажорирует топологию поточечной сходимости в $\mathbb{C}$. Кроме того, $H^{p,\,q}_{u,\,v}$ ультраборнологично как индуктивный предел семейства банаховых пространств. А так как оно, как отмечено выше, является внутренним индуктивным пределом последовательности банаховых пространств, то для него по теореме Гротендика [12, с. 230] справедлива теорема о замкнутом графике. Поэтому каждый мультипликатор пространства $H^{p,\,q}_{u,\,v}$ при любых p и q непрерывен. Последнее позволяет нам применить результаты из [13] об описании пространств непрерывных мультипликаторов индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть v — неотрицательная неубывающая выпуклая на $[0,\infty)$ функция, для которой выполнено условие* (3)*. Тогда*

$$v(t+1) = v(t)\Big(1 + \frac{O(1)}{t}\Big), \quad t \to \infty, \tag{5}$$

и, тем более,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v(t+1)}{v(t)} = 1.$$

$\lhd$ Из выпуклости v на $[0,\infty)$ следует, что

$$v(t+1) - v(t) \leqslant \frac{v(2t) - v(t)}{t} \qquad \forall\, t \geqslant 1.$$

Воспользовавшись (3), имеем при некотором $C > 0$, что

$$v(t+1) \leqslant v(t) + C\frac{v(t)}{t} + C \qquad \forall\, t \geqslant 1.$$

Учитывая неубывание v, получаем отсюда (5). $\rhd$

Предложение 1. *Пусть u и v — неотрицательные неубывающие на $[0,\infty)$ функции, v выпукла на $[0,\infty)$, $u(e^x)$ выпукла на $\mathbb{R}$ и выполнены условия* (1)–(4)*. Тогда при любом $q \in (0,\infty)$*

$$M\big(H^{\infty,q}_{u,v}\big) = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{r>0} H_{ru,\,\varepsilon v}.$$

$\lhd$ В соответствии с отмеченным выше $H^{\infty,q}_{u,v} = \widetilde{H}^{\infty,q}_{u,v}$ при любом $q \in (0,\infty)$, причем топология $H^{\infty,q}_{u,v}$ совпадает с топологией внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $\Big(\widetilde{H}_{nu,\,(q-q/n)v}\Big)_{n=1}^{\infty}$. Далее, заметим, что из выпуклости v и выпуклости и неубывания $u(e^x)$ следует [14, утверждение б) на с. 63 и теорема 2.1.2], что функции $v(\operatorname{Im} z)$ и $u(z)$ субгармоничны в $\mathbb{C}$. Поэтому и функции

$$w_n(z) := nu(z) + \Big(q - \frac{q}{n}\Big)\, v(\operatorname{Im} z)$$

субгармоничны в $\mathbb{C}$ при любом n. При этом, для всех z из $\mathbb{C}$ с $|z| \geqslant 1$ имеем

$$w_n^1(z) := \sup_{|\zeta|\leqslant 1} w_n(z+\zeta) \leqslant nu(2|z|) + \Big(q - \frac{q}{n}\Big)\, v(|\operatorname{Im} z| + 1).$$

Отсюда, учитывая (1), (2) и (5), получаем, что существуют такие $m > n$ и $C > 0$, что

$$w_n^1(z) + 2\ln(1+|z|^2) \leqslant mu(z) + \left(q - \frac{1}{m}\right) v(\operatorname{Im} z) + C \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда в соответствии с предложением 5 из [13] пространство $\widetilde{H}^{\infty,q}_{u,v}$ или, что то же самое, $H^{\infty,q}_{u,v}$ является густым (см. в связи с этим уточнение в [15] леммы 1 А. В. Абанина из [13], на которую опирается доказательство предложения 5 в [13]). Отсюда по предложению 4 из [13] (с учетом отмеченной выше непрерывности мультипликаторов из $M\big(H^{\infty,q}_{u,v}\big)$) заключаем, что

$$M\big(H^{\infty,q}_{u,v}\big) = \left\{\mu \in H(\mathbb{C}):\ (\forall\, n)\,(\exists\, m)\,\sup_{z\in\mathbb{C}} |\mu(z)| e^{(n-m)u(z) + (\frac{1}{m} - \frac{1}{n})v(\operatorname{Im} z)} < \infty\right\} =:\ M.$$

Легко видеть, что $M = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{r>0} H_{ru,\,\varepsilon v}$, откуда следует требуемое. $\rhd$

4. Оператор умножения

Приведем функциональный критерий того, что для данного нетривиального мультипликатора μ из $M\big(H^{\infty;q}_{u,v}\big)$ подпространство $\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ замкнуто в $H^{\infty;q}_{u,v}$.

Предложение 2. *Пусть μ — нетривиальный мультипликатор из $M\big(H^{\infty;q}_{u,v}\big)$. Подпространство $\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ замкнуто в $H^{\infty;q}_{u,v}$ в том и только в том случае, когда для любых $r\in(0,\infty)$ и $s\in(0,q)$ существуют такие $r_1\in(0,\infty)$, $s_1\in(0,q)$ и $C>0$, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{r_1u(\operatorname{Re}z)+s_1v(\operatorname{Im}z)}}\leqslant C\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{ru(\operatorname{Re}z)+sv(\operatorname{Im}z)}}\quad\forall f\in H^{\infty;q}_{u,v}. \tag{6}$$

$\lhd$ Как отмечено выше, оператор умножения Λ_μ действует непрерывно из $H^{\infty;q}_{u,v}$ в $H^{\infty;q}_{u,v}$. Кроме того, он инъективен в силу теоремы единственности аналитических функций. Таким образом, при наделении образа $\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ индуцированной из $H^{\infty;q}_{u,v}$ топологией $\Lambda_\mu:\ H^{\infty;q}_{u,v}\to\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ — линейный непрерывный биективный оператор.

Так как $H^{\infty;q}_{u,v}$ — (DFS)-пространство, то $\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ — замкнутое подпространство в $H^{\infty;q}_{u,v}$ в том и только в том случае, когда индуцированная в $\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ из $H^{\infty;q}_{u,v}$ топология совпадает в нем с топологией внутреннего индуктивного предела семейства $\{\mu\cdot H_{ru,\,sv}:\ r<\infty,\ s<q\}$. По тем же соображениям, что и для $H^{\infty;q}_{u,v}$, пространство $\operatorname*{ind}\limits_{r<\infty,\,s<q}\mu\cdot H_{ru,\,sv}$ относится к классу (DFS)-пространств.

Из сказанного с помощью уже упоминавшейся выше теоремы Гротендика следует, что $\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ замкнуто в $H^{\infty;q}_{u,v}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_\mu:\ H^{\infty;q}_{u,v}\to\mu\cdot H^{\infty;q}_{u,v}$ — топологический изоморфизм, что равносильно непрерывности обратного к Λ_μ оператора Λ_μ^{-1}. В свою очередь, непрерывность $\Lambda_\mu^{-1}:\ \operatorname*{ind}\limits_{r<\infty,\,s<q}\mu\cdot H_{ru,\,sv}\to\operatorname*{ind}\limits_{r<\infty,\,s<q}H_{ru,\,sv}$ в силу факторизационной теоремы Гротендика [16, теорема 6.5.1] эквивалентна (6) (здесь используется, что в задании пространства $H^{\infty;q}_{u,v}$ и топологии в нем можно ограничиться произвольными последовательностями $(r_n)_{n=1}^\infty$ и $(s_n)_{n=1}^\infty$ с $r_n\uparrow\infty$ и $s_n\uparrow q$).

Из предложения 2 и отмеченной в § 2 возможности замены $u(\operatorname{Re}z)$ на $u(z)$ в определении пространства $H^{\infty;q}_{u,v}$ и топологии в нем получаем такое полезное в приложениях следствие.

Следствие. *Пусть μ — нетривиальный мультипликатор из $M\big(H^{\infty;q}_{u,v}\big)$. Подпространство $\mu\cdot M\big(H^{\infty;q}_{u,v}\big)$ замкнуто в $M\big(H^{\infty;q}_{u,v}\big)$ в том и только в том случае, когда для любых $r\in(0,\infty)$ и $s\in(0,q)$ существуют такие $r_1\in(0,\infty)$, $s_1\in(0,q)$ и $C>0$, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{r_1u(z)+s_1v(\operatorname{Im}z)}}\leqslant C\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{ru(z)+sv(\operatorname{Im}z)}}\quad\forall f\in H^{\infty;q}_{u,v}. \tag{7}$$

5. Оператор свертки

Пусть $\omega:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ — неубывающая на $[0,\infty)$ функция, для которой

$$\ln t=o(\omega(t)),\ \ \omega(2t)=o(\omega(t)),\ \ \omega(t)=o(t)\ \text{ при } t\to\infty.$$

Кроме того, предполагаем, что функция $\varphi_\omega(x)\ :=\ \omega(e^x)$ выпукла на $\mathbb{R}$. Полагаем $\varphi^*_\omega(y):=\sup_{x\geqslant0}(xy-\varphi_\omega(x))$ при любом $y\geqslant0$ (— сопряженная с φ_ω по Юнгу функция). Возьмем $q\in(0,\infty)$ и рассмотрим пространство $\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$ всех бесконечно дифференцируемых на интервале $(-q,q)$ комплекснозначных функций f, для которых

$$\|f\|_n:=\sup_{k\geqslant0}\sup_{|x|\leqslant q-\frac1n}\frac{|f^{(k)}(x)|}{e^{n\varphi^*_\omega(\frac kn)}}<\infty\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Наделим $\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$ топологией, задаваемой набором преднорм $(\|\cdot\|_n)_{n=1}^{\infty}$, вместе с которой оно является пространством Фреше — Шварца ((FS)-пространством). Элементы $\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$ называются ультрадифференцируемыми на $(-q,q)$ функциями типа Берлинга. Заметим, что мы не требуем неквазианалитичности класса $\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$.

Из [6, теорема 6.5.1] следует, что преобразование Фурье — Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным с $\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$ пространством $\mathscr{E}'_{(\omega)}(-q,q)$ и пространством $H^{\infty,q}_{u,v}$, где $u(t):=\omega(t)$ и $v(t)=t$, для которого будем использовать специальное обозначение H^q_ω. Ясно, что для данных u и v выполнены все предположения, перечисленные во введении.

Зафиксируем произвольный нетривиальный мультипликатор μ пространства H^q_ω. Из предложения 1 следует, что $M(H^q_\omega)=\bigcap_{\varepsilon>0}H^\varepsilon_\omega$. Заметим, что $H^\varepsilon_\omega\subset H^q_\omega$ при любом $\varepsilon\in(0,q)$. Отсюда за счет стандартных рассуждений следует, что если обозначить через ψ_μ функционал из $\mathscr{E}'_{(\omega)}(-q,q)$, преобразование Фурье — Лапласа которого совпадает с μ, то правило

$$f\in\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)\longmapsto(T_\mu f)(x):=\langle\psi_\mu,f(x+\cdot)\rangle$$

определяет линейный непрерывный оператор из $E_{(\omega)}(-q,q)$ в $E_{(\omega)}(-q,q)$, который называется *оператором свертки*, порожденным мультипликатором μ. При этом, сопряженный с T_μ оператор T'_μ отождествляется с оператором умножения $\Lambda_\mu : H^q_\omega\to H^q_\omega$. Поскольку Λ_μ инъективен, то $T_\mu(E_{(\omega)}(-q,q))$ плотно в $E_{(\omega)}(-q,q)$. В силу общих результатов теории двойственности [16, теорема 8.6.13] заключаем тогда, что оператор $T_\mu : E_{(\omega)}(-q,q)\to E_{(\omega)}(-q,q)$ сюръективен в том и только в том случае, когда подпространство $\Lambda_\mu(H^q_\omega)$ замкнуто в H^q_ω. Таким образом, использовав предложение 2 и следствие из него, приходим к следующему результату.

Предложение 3. *Пусть ω удовлетворяет предположениям, приведенным в начале текущего параграфа, и μ — фиксированный нетривиальный мультипликатор пространства H^q_ω. Для того чтобы уравнение $T_\mu(f)=g$ имело решение $f\in\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$ для любой правой части $g\in\mathscr{E}_{(\omega)}(-q,q)$, необходимо и достаточно, чтобы для μ выполнялось условие* (6) *или, что то же самое,* (7).

В заключение приведем некоторые комментарии и перечислим задачи, касающиеся затронутых в настоящей статье вопросов.

1) Представляет интерес геометрическая характеризация поведения тех нетривиальных мультипликаторов пространства $H^{\infty,q}_{u,v}$, для которых подпространство $\mu\cdot H^{\infty,q}_{u,v}$ замкнуто в $H^{\infty,q}_{u,v}$. В случае пространства $H^{\infty,\infty}_{u,v}$ такая характеризация была дана в [10]. Отметим в связи с этим, что в [17] была получена новая интерпретация основного результата из [10].

2) Напомним, что отличная от тождественного нуля целая функция μ называется *делителем* класса H целых функций, если справедлива импликация

$$f\in H,\ \frac{f}{\mu}\in H(\mathbb{C})\implies\frac{f}{\mu}\in H.$$

Стандартно устанавливается, что для всякого делителя μ пространства $H^{\infty,q}_{u,v}$ подпространство $\mu\cdot H^{\infty,q}_{u,v}$ замкнуто в $H^{\infty,q}_{u,v}$. Поэтому условие (6), приведенное в предложении 2 (или (7) в следствии из него) является необходимым для того, чтобы μ была делителем $H^{\infty,q}_{u,v}$. Спрашивается, верно ли обратное? Отметим, что из геометрической характеризации З. Момма в [10] в качестве побочного вывода следует, что это так для главных идеалов алгебры $H^{\infty,\infty}_{u,v}$. Альтернативный [10] более прямой путь состоит в проверке того, что подпространство $\{\mu p : p$ — полином$\}$ плотно в пространстве $\{\mu f \in H_{u,v}^{\infty;q} : f$ — целая функция$\}$ (по этому поводу см., например, [18]).

3) В работе [4] рассматривались пространства E бесконечно дифференцируемых на вещественной оси функций, задаваемые с помощью оценки всех производных через некоторую весовую последовательность положительных чисел и весовую функцию, ограничивающую рост этих производных на бесконечности. С помощью преобразования Фурье — Лапласа функционалов была получена реализация H сопряженного пространства E', которая представляет собой пространство целых функций, задаваемое последовательностью двучленных весов. В качестве приложений были получены достаточные условия сюръективности оператора свертки в исходном пространстве E. Следует отметить, что пространства H из [4] и $H_{u,v}^{p;q}$ не совпадают ни при каких u, v, p и q.

Литература

1. *Björck G.* Linear partial differential operators and generalized distributions // Ark. Mat.—1966.—Vol. 6.—P. 351–407.
2. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math.—1973.—Vol. 20, № 1.—P. 25–105.
3. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—Vol. 17.—P. 206–237.
4. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 10.—С. 57–86.
5. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространству бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
6. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—222 с.
7. *Berenstein C., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math.—1979.—Vol. 33.—P. 109–143.
8. *Ehrenpreis L.* Solutions of some problems of division. IV // Amer. J. Math.—1960.—Vol. 82.—P. 522–588.
9. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J.—1987.—Vol. 36, № 4.—P. 729–756.
10. *Momm S.* Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math.—1992.—Vol. 58.—P. 47–55.
11. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
12. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—258 с.
13. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math.—1989.—Т. 15, № 2.—С. 105–114.
14. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.—М.: Наука, 1971.—432 с.
15. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.
16. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
17. *Абанин А. В., Андреев А. В.* Функции регулярного роста для хермандеровских алгебр целых функций, порожденных нерадиальным весом // В сб.: Исследования по современному анализу и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А.—2008.—С. 7–11.
18. *Епифанов О. В.* Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях // Мат. заметки.—1974.—Т. 15, № 5.—С. 787–796.

Статья поступила 22 сентября 2008 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет, *зав. каф. мат. ан.*
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, *вед. научн. сотр.*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanin@math.rsu.ru