Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 1, С. 43–53

УДК **517.9**

ОБ A-ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ. I

Ю. Ф. Коробейник

В работе изучаются некоторые свойства A-представляющих систем, введенных автором в 1975 г. в одной из его статей и с тех пор нигде не рассматривавшихся.

Ключевые слова: A-представляющие системы, оператор представления и правый обратный к нему, линейные преобразования представляющих систем.

1. Пусть H — полное отделимое локально выпуклое пространство (ПОЛВП) над полем скаляров Φ, где $\Phi = \mathbb{C}$ или $\Phi = \mathbb{R}$, с топологией $\mathscr{P}$, определяемой набором (непрерывных) преднорм p: $\mathscr{P} = \{p\}$.

Пусть, далее, Ω — некоторое счетное множество индексов и $(\omega_k)_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность его конечных (т. е., состоящих из конечного числа индексов) подмножеств, исчерпывающая Ω и такая, что:

$$\forall\, n \geqslant 1 \quad \omega_n \subset \omega_{n+1} \subset \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\omega_{k+1} \setminus \omega_k) \right).$$

Возьмем какое-либо счетное множество X ненулевых элементов x_α из H таких, что любая (конечная) система элементов $(x_\alpha : \alpha \in \omega_m)$, $m = 1, 2, \dots$ линейно независима в H. Если $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — произвольное числовое семейство ($c_\alpha \in \Phi, \forall\, \alpha \in \Omega$), то $\forall\, m \geqslant 1$ положим $S_m(c) := \sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha$. Образуем векторное пространство $A_1(X, H)$ числовых семейств $c = (c_\alpha)$, $c_\alpha \in \Phi$ ($\forall\, \alpha \in \Omega$), для которых в H существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_m(c)$. Очевидно, что $A_1(X, H)$ содержит все «орты» $e_{(\beta)} = (e_{\gamma,\beta})_{\gamma\in\Omega}$, где $\beta \in \Omega$ и $e_{\gamma,\beta} = 0$ при $\gamma \neq \beta$, $e_{\beta,\beta=1}$.

Пусть теперь A — (векторное) подпространство $A_1(X, H)$. Назовем X A-представляющей системой в H (A-ПС в H), если любой элемент y из H допускает представление

$$y = \lim_{m\to\infty} S_m(c), \tag{1}$$

в котором предел берется в H и $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in A$.

В дальнейшем для краткости $A_1(X, H)$ — ПС в H называется представляющей системой (ПС) в H.

Введем в пространстве $A_1(X, H)$ топологию τ_1 набором преднорм $Q_{\mathscr{P}} = \{q_p^X\}_{p\in\mathscr{P}}$, где $q_p^X(c) := \sup\limits_{m\geqslant 1} p(S_m(c))$. Заметим, что из отделимости пространства H следует, что $(A_1(X, H), \tau_1)$ также отделимо. Действительно, если $d \in A_1(X, H)$ и $q_p^X(d) = 0$ ($\forall\, p \in \mathscr{P}$), то

$$(\forall\, p \in \mathscr{P})\ (\forall\, m \geqslant 1) \quad p(S_m(d)) = 0.$$

Но тогда при любом фиксированном $m \geqslant 1$ и всех $p \in \mathscr{P}$ $p(S_m(d)) = 0$, и в силу отделимости H, $S_m(d) = 0$, $m = 1, 2, \dots$

Так как по исходному предположению система $(x_\alpha)_{\alpha\in\omega_m}$ линейно независима и $\sum_{\alpha\in\omega_m} d_\alpha x_\alpha = 0$, то $d_\alpha = 0$, $\forall\, \alpha \in \omega_m$, $\forall\, m \geqslant 1$. Окончательно, $d = 0$.

Предположим, что в подпространстве A пространства $A_1(X, H)$ введена локально-выпуклая топология τ такая, что $(A, \tau) \hookrightarrow (A_1(X, H), \tau_1)$. Тогда (A, τ) — ОЛВП (над полем скаляров Φ).

Наиболее важными представителями А-ПС являются, пожалуй, представляющие системы (ПС) и абсолютно представляющие системы (АПС) в ОЛВП H. Для первых $A = A_1(X, H)$, а для вторых $A = A_2(X, H)$, где

$$A_2(X, H) := \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} :\ (\forall\, p \in \mathscr{P})\ q_p^{(2)}(c) := \sum_{\alpha\in\Omega} |c_\alpha| p(x_\alpha) < \infty \right\}.$$

Если в $A_2(X, H)$ ввести топологию τ_2 набором преднорм $Q_{\mathscr{P}}^{(2)} = \{q_p^{(2)} : p \in \mathscr{P}\}$, то $(A_2(X, H), \tau_2) \hookrightarrow (A_1(X, H), \tau_1)$.

Из этих определений следует, что любая А-ПС, где $(A, \tau) \hookrightarrow (A_1(X, H), \tau_1)$ (в частности, любая АПС) в H подавно будет ПС в H. Заметим еще, что если H — ОЛВП, то $A_2(X, H)$, τ_2 — ПОЛВП; если же H — ПОЛВП, то $A_1(X, H)$ — также ПОЛВП.

Понятие представляющей системы впервые введено, по-видимому, А. А. Талаляном [1] для пространств Фреше вещественнозначных функций, определенных на некотором промежутке вещественной оси. Класс АПС в произвольном ПОЛВП H был рассмотрен автором в его статье [2], а общее определение А-ПС было дано в его работе [3]. Следует заметить, что к настоящему моменту имеется довольно большое число журнальных публикаций, в которых изучаются свойства ПС и (особенно) АПС и их приложения в анализе и дифференциальных уравнениях. Однако работ (кроме исходной статьи [3]), посвященных общим А-ПС, в литературе обнаружить не удалось. В настоящей статье этот пробел частично восполняется.

2. Введем оператор представления

$$L_A^X : \forall\, c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in A \to L_A^X(c) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha \right) \in H.$$

Очевидно, что L_A^X — линейный оператор из A в H. Кроме того, в силу того, что $(A, \tau) \hookrightarrow A_1(X, H)$, для любой преднормы p из $\mathscr{P}$ найдутся конечная постоянная $b < \infty$ и преднорма t из набора преднорм, определяющих топологию τ в A, такие, что

$$(\forall\, c \in A)\ q_p^X(c) \leqslant bt(c).$$

Но

$$\forall\, c \in A\ p(L_A^X c) \leqslant \sup_{m\geqslant 1} p\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha \right) = q_p^X(c),$$

и L_A^X — линейный непрерывный оператор из (A, τ) в H. Очевидно, что X — А-ПС в H тогда и только тогда, когда H — эпиморфизм ((A, τ) на H).

Заметим, что в определении А-ПС X не требуется единственность представления элемента y из H в виде (1) по системе X с коэффициентами из A. Если такая единственность имеет место для любого y из H, то соответствующую A-ПС X естественно назвать

A-базисом (при $A = A_2(X, H)$ — абсолютным базисом, а при $A = A_1(X, H)$ — просто базисом в H).

Очевидно, что любой A-базис в H (соответственно, абсолютный базис или (просто) базис) будет А-ПС (соответственно, АПС или ПС) в H. Обратное заключение, вообще говоря, неверно, в чем можно убедиться на, возможно, не самом общем, но довольно простом примере (пример подобного рода приводился автором в его лекции, прочитанной на Зимней Саратовской математической школе в 1971 г.).

Пусть H — ПОЛВП функций, определенных на каком-либо множестве Q из B_p, где $p \geqslant 1$ и $B_p = \mathbb{C}^p$ или $B_p = \mathbb{R}^p$. Будем считать, что пространство H инвариантно относительно дифференцирования в том смысле, что все операторы частного дифференцирования $\frac{\partial v}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots p$, где $t = (t_1, t_2, \ldots t_p) \in B_p$, действуют непрерывно из H в H.

Обозначим, далее, символом Λ множество всех точек λ из $\mathbb{C}^p$ таких, что $e_\lambda(t) := \exp < \lambda, t >_p \in H$, и предположим, что множество Λ бесконечно. Допустим еще, что для некоторого собственного счетного подмножества Λ_1 множества Λ система экспонент $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\} = \{e_{\lambda_n} : n = 1, 2, \ldots\}$ является А-ПС в H. Тогда, если $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Lambda_1$, то

$$e_{\lambda_0}(t) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{\lambda_\alpha \in \tilde{\omega}_m} \beta_\alpha e_{\lambda_\alpha} \right), \quad \text{где } \Lambda_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{\omega}_j, \quad \tilde{\omega}_1 \subset \tilde{\omega}_2 \subset \ldots \subset \Lambda_1.$$

При этом $\{\beta_\alpha\}_{\lambda_\alpha \in \Lambda_1} \in A$ и $\exists k_1, \exists m_0$: $k_1 \in \tilde{\omega}_{m_0}$ и $\beta_{k_1} \neq 0$ (здесь $(\forall\, k \geqslant 1)$ $\tilde{\omega}_k := \Lambda_1 \cap \omega_k$). Так как $\lambda_0 \neq \lambda_{k_1}$, то $\exists j \leqslant p$: $\lambda_{0,j} \neq \lambda_{k_1,j}$.

Продифференцировав равенство

$$e_{\lambda_0}(t) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in \tilde{\omega}_m} \beta_k e_{\lambda_k} \right) \tag{2}$$

по t_j, получим

$$\lambda_{0,j} e_{\lambda_0}(t) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in \tilde{\omega}_m} \beta_k e_{\lambda_k} \cdot \lambda_{k,j} \right). \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (2) на $\lambda_{0,j}$ и вычтя полученное соотношение из (3), найдем:

$$0 = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in \tilde{\omega}_m} (\lambda_{k,j} - \lambda_{0,j}) \beta_k e_{\lambda_k} \right).$$

Так как предел справа существует, то $\Big\{(\lambda_{k,j} - \lambda_{0,j})\beta_k\Big\}_{\lambda_k \in \Lambda_1} \in A$, причем при $k = k_1$ $(\lambda_{k_1,j} - \lambda_{0,j})\beta_{k_1} \neq 0$, и мы получили нетривиальное представление нуля в H по системе $E_{\Lambda_1} := (e_{\lambda_k} : \lambda_k \in \Lambda_1)$. Отсюда следует, что единственность представления в H по системе E_{Λ_1} не имеет места, и E_{Λ_1} — не А-базис в H.

Во многих работах рассматривались функциональные пространства H, инвариантные относительно дифференцирования и содержащие совокупность экспонент $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, где Λ имеет мощность континуума. Из приведенных рассуждений следует, что во всех таких пространствах ни одна А-ПС экспонент не будет А-базисом. В частности, любая представляющая система экспонент в таком пространстве H (существование подобных ПС установлено во многих работах), не будет базисом в H.

3. В связи с тем, что в общей ситуации единственность представления элементов из H в виде (1), с коэффициентами из A, может не иметь места, дадим определения некоторых подклассов A-ПС.

1. Если коэффициенты хотя бы одного представления (1) произвольного элемента y из H с коэффициентами $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ из A могут быть найдены эффективно (т. е., определены конструктивно), то X называется эффективно A-представляющей системой (обозначение: ЭА-ПС) в H. В случае, когда $A = A_1(X, H)$, используется обозначение ЭПС, а при $A = A_2(X, H)$ — обозначение ЭАПС.

2. Если оператор представления L_A^X является эпиморфизмом A на H, имеющим линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО), то X называется правильной А-ПС (ПА-ПС) (соответственно, ППС и ПАПС).

3. Наконец, если L_A^X — эпиморфизм A на H, имеющий конструктивно определяемый ЛНПО, то X называется эффективно правильной А-представляющей системой (ЭПА-ПС) (при $A = A_1(X, H)$ — ЭППС, а при $A = A_2(X, H)$ — ЭПАПС).

4. Рассмотрим теперь общие линейные преобразования А-ПС. Всюду далее предполагается (и впредь особо не оговаривается), что выполнены следующие условия:

а) при $j = 1, 2$ H_j — ПОЛВП с набором преднорм $\mathscr{P}_j = \{p_j\}$, определяющим топологию в H_j;

б) T — линейный непрерывный из H_1 в H_2 оператор;

в) $X = (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — некоторое счетное множество элементов (x_α) из H_1 таких, что любая конечная подсистема X линейно независима в H_1, а любая конечная подсистема множества $TX := (Tx_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ линейно независима в H_2.

Отметим сначала один почти очевидный результат.

Лемма 1. $A_j(X, H_1) \hookrightarrow A_j(TX, H_2)$, $j = 1, 2$.

$\lhd$ Действительно, прежде всего, если предел $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha\right)$ имеется в H_1, то (в силу непрерывности оператора T)

$$T\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha T x_\alpha\right) \in H_2.$$

Следовательно, $A_1(X, H_1) \subseteq A_1(TX, H_2)$. Далее,

$$(\forall\, p_2 \in \mathscr{P}_2)\ (\exists p_1 \in \mathscr{P}_1)\ (\exists b < +\infty)\ \forall\, x \in H_1\ p_2(Tx) \leqslant b p_1(x).$$

Отсюда $\forall\, c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in A_1(X, H_1)$ имеем

$$q_{p_2}^{TX}(c) := \sup_{m\geqslant 1} p_2\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha T x_\alpha\right)$$
$$= \sup_{m\geqslant 1} p_2\left(T\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha\right)\right) \leqslant b \sup_{m\geqslant 1} p_1\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha\right) = b_2 q_{p_1}^X(c),$$

и, следовательно, $A_1(X, H_1) \hookrightarrow A_1(TX, H_2)$.

Аналогично, и притом еще более просто, показывается справедливость второго вложения. $\rhd$

Приведем теперь некоторые (используемые в дальнейшем) простые результаты о линейных преобразованиях общих А-ПС и введенных выше трех их подклассов.

Теорема 1. *Если X — А-ПС в H_1 и T — эпиморфизм H_1 на H_2, то TX — А-ПС в H_2.*

$\lhd$ Для любого $y \in H_2$ в H_1 имеется элемент x такой, что $Tx = y$. Так как X — А-ПС в H, то найдется сходящееся в H_1 представление x по системе X с коэффициентами из A:

$$x = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha x_\alpha\right).$$

Отсюда

$$y = Tx = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_m} c_\alpha Tx_\alpha\right),$$

и TX — А-ПС в H_2. $\rhd$

Перед тем, как установить (неполное) обращение этой теоремы, дадим одно определение.

Пусть T — оператор из ПОЛВП H_1 в ПОЛВП H_2 и $X = (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — некоторая система ненулевых элементов из H_1. Говорят, что семейство $X(A,T)$-инвариантно относительно пары H_1, H_2, если из существования предела в H_2 последовательности $\left\{\sum_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha Tx_\alpha\right\}_{k=1}^\infty$ (с коэффициентами $(c_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ из A) следует, что последовательность $\left\{\sum_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\right\}_{k=1}^\infty$ имеет предел в H_1.

Из этого определения вытекает, что если T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2 и система X (A,T)-инвариантна относительно пары H_1 , H_2, то любая последовательность вида $\left\{\sum_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\right\}_{k=1}^\infty$, в которой $(c_\alpha)_{\alpha\in\Omega}\in A$, имеет предел в H_1 тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\sum_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha Tx_\alpha\right\}_{k=1}^\infty$ имеет предел в H_2 (иными словами, $A(X,H_1) = A(TX,H_2)$).

Теорема 2. *Пусть $x_\alpha \in H_1$, $\alpha\in\Omega$; T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2; система $X = (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ (A,T)-инвариантна относительно пары H_1, H_2 и $TX = (Tx_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — А-ПС в H_2. Тогда T — эпиморфизм H_1 на H_2.*

$\lhd$ Напомним вначале, что $A \subseteq A_1(TX,H_2) = A_1(X,H_1)$. Далее, если y — произвольный элемент из H_2, то найдется хотя бы одно представление вида $y = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} y_\alpha Tx_\alpha$, в котором $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}\in A$ (и, следовательно, в H_2 существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} y_\alpha Tx_\alpha$). Но тогда в H_1 существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} y_\alpha x_\alpha =: x$, откуда

$$Tx = \lim_{k\to\infty}\sum_{\alpha\in\omega_k} y_\alpha Tx_\alpha = y,$$

и T — эпиморфизм H_1 на H_2. $\rhd$

Аналогичным образом формулируются и доказываются три пары утверждений, относящихся к введенным выше подклассам A-представляющих систем.

Теорема 3. *Пусть X — ЭА-ПС в H_1 и T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий конструктивно определяемый правый обратный B. Тогда TX — ЭА-ПС в H_2.*

$\lhd$ Действительно, для любого y из H_2 $By \in H_1$ и $TBy = y$. При этом $By = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\alpha\in\omega_k}\gamma_\alpha x_\alpha$, где $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\Omega}\in A\subseteq A_1(X,H_1)\subseteq A_1(TX,H_2)$ и коэффициенты $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ определяются конструктивно. Отсюда

$$y = T\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{\alpha\in\omega_k}\gamma_\alpha x_\alpha\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_k}\gamma_\alpha Tx_\alpha\right),$$

причем последний предел берется в H_2 и $(\gamma_l)_{l\in\Omega} \in A$. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2, а TX — ЭА-ПС в H_2. Пусть, далее, система X (A,T)-инвариантна относительно пары H_1, H_2. Тогда T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий эффективно определяемый правый обратный.*

Теорема 5. *Пусть T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий ЛНПО, и пусть X — ПА-ПС в H_1. Тогда TX — ПА-ПС в H_2.*

Теорема 6. *Пусть T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2. Пусть, далее, TX — ПА-ПС в H_2 и система X (A,T)-инвариантна относительно пары H_1, H_2. Тогда T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий ЛНПО.*

Теорема 7. *Если T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий конструктивно определяемый ЛНПО, а X — ЭПА-ПС в H_1, то TX — ЭПА-ПС в H_2.*

Теорема 8. *Если T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2, система X (A,T)-инвариантна относительно H_1, H_2, а TX — ЭПА-ПС в H_2, то T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий эффективно определяемый ЛНПО.*

$\lhd$ Доказательство теоремы 5. По теореме 1 TX — А-ПС в H_2. Далее, так как X — ПА-ПС в H_1, то оператор представления (ОП)

$$L_A^X : A \to H_1,\ \forall\, c \in A \to L_A^X c = \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha\in\omega_k} a_\alpha x_\alpha \in H_1,$$

имеет ЛНПО

$$B_1 : H_1 \to A, \quad L_A^X B_1 x = x \quad (\forall\, x \in H_1).$$

Запишем ОП L_A^{TX} для системы TX в H_2:

$$\forall\, d \in A_2 \to L_A^{TX} \quad d = \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha\in\omega_k} d_\alpha T x_\alpha \in H_2.$$

По предположениям теоремы оператор T имеет ЛНПО

$$T_r^{-1} : TT_r^{-1} x = x \quad (\forall\, x \in H_2).$$

Тогда оператор $B_2 := B_1 T_r^{-1}$ линеен и непрерывно действует из H_2 в A, причем

$$\forall\, x \in H_2 \quad L_A^{TX} B_2 x = \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha\in\omega_k} (B_1 T_r^{-1} x)_\alpha T x_\alpha.$$

Так как B_2 действует из H_2 в A, то $\{(B_1 T_r^{-1} x)_{\alpha\in\Omega}\} \in A$, и, следовательно, в H_1 существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{\alpha\in\omega_k} \gamma_\alpha x_\alpha \right) = y, \quad \gamma_\alpha := (B_1 T_r^{-1} x)_\alpha,\ \alpha \in \Omega.$$

Но тогда

$$Ty = T \left[\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{\alpha\in\omega_k} \gamma_\alpha x_\alpha \right) \right] = \lim_{k\to\infty} T \left(\sum_{\alpha\in\omega_k} \gamma_\alpha x_\alpha \right) = T L_A^X B_2 x$$

$$= T L_A^X B_1 T_r^{-1} x = T T_r^{-1} x = x = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{\alpha\in\omega_k} \gamma_\alpha T x_\alpha \right) = L_A^{TX} B_2 x.$$

Таким образом, B_2 — ЛНПО для ОП L_A^{TX}, и TX — ПА-ПС в H_2.

Заметим еще, что если ЛНПО для T определяется эффективно, а X — ЭПА-ПС в H_1, то оператор B_1, а с ним и $B_2 = B_1\dot{T}_r^{-1}$ также определяется конструктивно, и, следовательно, TX — ЭПА-ПС в H_2. Тем самым доказана и теорема 7. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 6. По теореме 2 T — эпиморфизм H_1 на H_2. Далее, по предположению теоремы ОП L_A^{TX} имеет ЛНПО

$$B_2 : L_A^{TX} B_2 x = x \ (\forall\, x \in H_2)$$

и, кроме того, для любого d из $A \subseteq A_1(X,H_1) \subseteq A_1(TX,H_2)$ в H_2 существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\Big(\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} d_\alpha T x_\alpha\Big)$. Но тогда для любого $d \in A$ в H_1 существует предел x_0 последовательности $\Big\{\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} d_\alpha x_\alpha\Big\}_{k=1}^{\infty}$ такой что

$$x_0 = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_k} d_\alpha x_\alpha\right) = L_A^X(d).$$

В силу непрерывности оператора T имеем

$$TL_A^X(d) = Tx_0 = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\omega_k} d_\alpha T x_\alpha\right) = L_A^{TX}(d) \quad (\forall\, d \in A).$$

Возьмем теперь любой элемент y из H_2 и положим $d = B_2 y$. Тогда $d \in A$ и $TL_A^X d = L_A^{TX} B_2 y = y$, т. е.

$$T(\tilde{x}) = y, \text{ где } \tilde{x} = L_A^X d = L_A^X B_2 y \in H_1.$$

Таким образом, $L_A^X B_2$ — ЛНПО для эпиморфного оператора T. При этом, если еще ЛНПО B_2 для ОП L_A^{TX} определяется эффективно (т. е., если TX — ЭПА-ПС в H_2), то оператор $L_A^X B_2$ также определяется эффективно, и справедлива теорема 8. $\rhd$

Аналогично доказывается и теорема 4.

5. Остановимся отдельно на случаях, когда

$$A = A_1(X,H_1) \text{ и } A = A_2(X,H_2).$$

В этих случаях теорема 1 принимает следующий вид

Теорема 9. *Если X — $A_1(X,H_1)$-ПС или $A_2(X,H_1)$-ПС в H_1 и T — эпиморфизм H_1 на H_2, то TX — $A_1(X,H_1)$-ПС (соответственно, $A_2(X,H_1)$-ПС) в H_2.*

Утверждение X — $A_1(X,H_1)$-ПС в H_1 (X — $A_2(X,H_1)$-ПС в H_1) равносильно тому, что X — ПС в H_1 (соответственно, X — АПС в H_1). Но по лемме 1, если TX — $A_1(X,H_1)$-ПС или $A_2(X,H_1)$-ПС в H_2, то TX — ПС (соответственно, АПС) в H_2. Таким образом, из теоремы 9 вытекает более грубое утверждение:

Теорема 10. *Если T — эпиморфизм H_1 на H_2 и X — ПС или АПС в H_1, то TX — ПС (соответственно, АПС) в H_2.*

Точно так же формулируются аналоги теорем 2–8. Приведем в качестве примера формулировки теорем, соответствующих теоремам 7 и 8.

Теорема 11. *Если T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий конструктивно определяемый ЛНПО, и если X — ЭП $A_1(X,H_1)$-ПС или ЭП $A_2(X,H_1)$-ПС в H_1, то TX — ЭП $A_1(X,H_1)$-ПС в H_2 (соответственно, ЭП $A_2(X,H_1)$-ПС в H_2).*

Теорема 12. *Если T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий эффективно определяемый ЛНПО, и если X — ЭППС или ЭПАПС а H_1, то TX — ЭППС (соответственно, ЭПАПС) в H_2.*

Теорема 13. *Если T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2, система X $(A_1(X,H_1),T)$-инвариантна (или $(A_2(X,H_1),T)$-инвариантна) относительно пары H_1, H_2 и если TX — ЭП $A_1(X,H_1)$-ПС (соответственно, ЭП $A_2(X,H_1)$-ПС) в H_2, то T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий эффективно определяемый ЛНПО.*

Теорема 14. *Если T — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2, $A_1(X,H_1) = A_1(TX,H_2)$ или $A_2(X,H_1) = A_2(TX,H_2)$ и если TX — ЭППС (соответственно, ЭПАПС) в H_2, то T — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий конструктивно определяемый ЛНПО.*

5. Изложенные общие результаты используются далее в частном случае, когда при $j=1,2$ H_j — ПОЛВП функций, определенных на некотором компакте Q_j из $\mathbb{C}^p$ (или из $\mathbb{R}^p$), $p \geqslant 1$, причем $Q_2 \subset Q_1$ и $H_1 \hookrightarrow H_2$. В качестве оператора T берется вначале оператор $T_{1,2}$ «сужения» с Q_1 на Q_2:

$$\forall\, y \in H_1 \to T_{1,2}y := y\Big|_{Q_2}$$

и предполагается, что этот оператор (очевидно, линейный) непрерывен и действует из H_1 в H_2. Допустим, что Q — правый обратный для $T_{1,2}$. Тогда

$$T_{1,2}(Qx) = x \ (\forall\, x \in H_2) \text{ или } (Qx)\Big|_{Q_2} = x \ (\forall\, x \in H_2).$$

Таким образом, оператор Q всегда совпадает с оператором «подъема» из Q_2 в Q_1, т. е. с оператором, который каждую (определенную на Q_2) функцию y из H_2 продолжает (из Q_2 в Q_1) до некоторой функции y_1 из H_1 такой, что

$$y_1\Big|_{Q_2} = T_{1,2}y_1 = y.$$

Такой оператор назовем оператором продолжения из H_2 в H_1.

Очевидно, что ЛПО $(T_{1,2})^{-1}_{np}$ для оператора «сужения» $T_{1,2}$ существует тогда и только тогда, когда имеется оператор $M_{2,1}$ продолжения из H_2 в H_1, причем всегда оператор $(T_{1,2})^{-1}_{np}$ (если он существует) совпадает с $M_{2,1}$.

Ясно также, что $T_{1,2}$ — эпиморфизм H_1 на H_2, имеющий ЛНПО, тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный оператор продолжения $M_{2,1}$.

Выясним еще, что означает в данной конкретной ситуации $(A, T_{1,2})$-инвариантность системы X относительно пары H_1, H_2. Нетрудно убедиться (в предположении о непрерывности оператора $T_{1,2}$), что система X $(A, T_{1,2})$-инвариантна относительно пары H_1, H_2 в том и том случае, если любая последовательность $\Big\{\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\Big\}_{k=1}^{\infty}$, в которой $(c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in A$, сходится (т. е. имеет конечный предел) в H_1 тогда и только тогда, когда последовательность $\Big\{\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\Big|_{Q_2}\Big\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в H_2.

Легко переформулировать теоремы 1–8 для рассматриваемой частной ситуации. Мы ограничимся здесь только формулировками двух из этих результатов, предоставив читателю сформулировать остальные.

Теорема 15. *Пусть оператор «сужения» $T_{1,2}$ непрерывен из H_1 в H_2 и существует конструктивно определяемый линейный непрерывный оператор $M_{1,2}$ «подъема из Q_2 в Q_1». Пусть, далее, X — ЭПА-ПС в H_1. Тогда TX — ЭПА-ПС в H_2.*

Теорема 16. *Пусть*

(1) *оператор* $T_{1,2}$ *непрерывен из* H_1 *в* H_2;

(2) $A \subseteq A_1(X, H_1)$;

(3) *любая последовательность* $\left\{\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\right\}_{k=1}^{\infty}$, *в которой* $(c_\alpha)_{\alpha\in\omega} \in A$, *сходится в* H_1 *тогда только тогда, когда последовательность* $\left\{\sum\limits_{\alpha\in\omega_k} c_\alpha x_\alpha\Big|_{Q_2}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится в* H_2;

(4) $\{x_l\}_{l\in\Omega}$ — *ЭПА-ПС в* H_2.

Тогда $T_{1,2}$ — *эпиморфизм* H_1 *на* H_2, *имеющий эффективно определяемый ЛНПО (совпадающий с* $M_{1,2}$*).*

Следствие. *Пусть выполнены предположения* (1)–(3) *теоремы* 16 *и, кроме того,* X — *ЭПА-ПС в* H_1. *Тогда равносильны такие утверждения:*

(1) *Существует и конструктивно определяется линейный непрерывный (из* H_2 *в* H_1*) оператор* $M_{1,2}$ *«подъема из* Q_2 *в* Q_1*».*

(2) $T_{1,2}X = \{x_\alpha\big|_{Q_2}\}_{\alpha\in\Omega}$ — *ЭПА-ПС в* H_2.

Заметим, что изложенный в этом пункте материал обобщает результаты из более ранних работ автора (см., например, [4, 6]).

6. Приведем один довольно общий пример, в котором имеет место предположение в), сформулированное в начале п. 4.

Пусть выполнено условие а) из п. 4 и пусть T — линейный оператор, действующий из H_1 в H_2 (в отличие от б) непрерывность T из H_1 в H_2 не предполагается). Пусть, далее, $X = (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — некоторое счетное множество собственных элементов x_α оператора T с попарно различными собственными значениями:

$$Tx_\alpha = \lambda_\alpha x_\alpha,\ \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \text{ при } \alpha \neq \beta$$

(ясно, что если $\lambda_\alpha \neq 0$, то $x_\alpha \in H_1 \cap H_2$).

Покажем, что в данной ситуации любая конечная подсистема X линейно независима в H_1. Доказательство проведем методом полной математической индукции. Так как по определению собственный элемент оператора T отличен от нулевого, то при $n = 1$ нужное нам утверждение верно. Допустим теперь, что любая совокупность n элементов x_{α_j}, $j = 1, 2, \ldots n$, из X линейно независима в H_1, и докажем, что произвольная система $(x_{\alpha_j})_{\alpha=1}^{n+1}$ элементов из X, где $\alpha_{n+1} \in \Omega$, также линейно независима в H_1. Рассуждая от противного, предположим, что некоторая система вида

$$\Big(x_{\alpha_j} : x_{\alpha_j} \in X,\ \alpha_j \in \Omega,\ j = 1, 2, \ldots, n+1\Big)$$

линейно зависима в H_1, т. е., что существует $\{c_j\}_{j=1}^{n+1}$:

$$\sum_{j=1}^{n+1} |c_j| > 0,\ \sum_{j=1}^{n+1} c_j x_{\alpha_j} = 0. \tag{4}$$

Применяя к равенству (4) линейный оператор T, получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \lambda_{\alpha_j} x_{\alpha_j} = 0. \tag{5}$$

Пусть $k_0 \leqslant k \leqslant n+1$, $k_0 = \min\{m : 1 \leqslant m \leqslant n+1,\ c_m \neq 0\}$. Вычитая из равенства (5) предыдущее, предварительно умноженное на $\lambda_{\alpha_{k_0}}$, найдем:

$$\sum_{k=k_0+1}^{n+1} c_k(\lambda_{\alpha_k} - \lambda_{\alpha_{k_0}})x_{\alpha_k} = 0.$$

В силу исходного предположения математической индукции система $\{x_{\alpha_k} : 1 \leqslant k \leqslant n+1,\ k \neq k_0\}$ линейно независима в H_1. Поэтому

$$c_k(\lambda_{\alpha_k} - \lambda_{\alpha_{k_0}}) = 0,\ k_0 + 1 \leqslant k \leqslant n+1.$$

Так как $\lambda_{\alpha_k} \neq \lambda_{\alpha_{k_0}}$ при $k \neq k_0$, то из последних соотношений следует, что

$$c_k = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n+1,\ k \neq k_0.$$

Но тогда равенство (4) примет такой вид:

$$c_{k_0} x_{\alpha_{k_0}} = 0,\ \text{где } c_{k_0} \neq 0.$$

Следовательно, $x_{\alpha_{k_0}} = 0$, что невозможно. Этим доказательство по индукции завершается.

Заметим еще, что если $\lambda_\alpha \neq 0$, $\alpha \in \Omega$, то в предположениях данного пункта любая конечная совокупность элементов из X линейно независима в H_1, а из $TX := (\lambda_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — в H_2. Это означает, что каждая конечная подсистема из X линейно независима и в H_1, и в H_2.

Пожалуй, наиболее интересным для нас частным случаем только что описанной ситуации является случай, когда при $j = 1, 2$ H_j — ПОЛВП функций от p (вещественных или комплексных) переменных, а T — оператор свертки:

$$T(\exp\langle\lambda, z\rangle_p) = a(\lambda)\exp\langle\lambda, z\rangle_p;\ \lambda, z \in \Phi,\ \text{где } \Phi = \mathbb{R}^p \text{ или } \mathbb{C}^p.$$

Пусть для любого $\lambda \in \Omega \subseteq \Phi$

$$\exp\langle\lambda, z\rangle_p \in H_1 \cap H_2;\ a(\lambda_1) \neq a(\lambda_2),\ \text{если } \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega \text{ и } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Пусть еще оператор T действует из H_1 в H_2. Тогда по доказанному, любая конечная совокупность элементов системы $\{\exp\langle\lambda, z\rangle_p\}_{\lambda\in\Omega}$ линейно независима и в H_1, и в H_2.

В заключение отметим, что применение общих результатов о линейных преобразованиях А-ПС, изложенных в данной статье, к некоторым конкретным функциональным пространствам в случае, когда $A = A_1$ или $A = A_2$, дано в работах [4–7].

Литература

1. *Талалян А. А.* Представление измеримых функций рядами // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, вып. 5.—С. 77–141.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной связи // Мат. анализ и его приложения.—1975.—Т. 7.—С. 200–208.
4. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых классах представляющих систем и их преобразованиях. I // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского.—Казань, 2002.—Т. 14.—С. 171–185.

5. *Коробейник Ю. Ф.* Эффективно представляющие θ-тригонометрические системы и их приложения. Часть I.—1999.—35 с. Деп. в ВИНИТИ 29.06.99, № 2132; часть II.—1999.—35 с. Деп. в ВИНИТИ 24.11.99, № 3474.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Линейные преобразования представляющих и абсолютно представляющих систем // Изв. вузов. Математика.—2005.—№ 9.—С. 19–28.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Аппроксимативные свойства θ-тригонометрических систем // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. Спецвыпуск «Математика и механика сплошной среды».—2004.—С. 150–153.

Статья поступила 10 декабря 2008 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный федеральный университет,
проф. каф. матем. анализа
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
гл. научн. сотр. лаб. комплексного анализа
E-mail: kor@math.rsu.ru