Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 4, С. 16–21

УДК **512.542**

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, I[1]

В. И. Зенков, А. И. Макосий

В конечной группе с простым цоколем лиева типа над полем порядка 3, лиева ранга не превосходящего 4 найдена нижняя оценка для числа орбит при действии сопряжениями фиксированной силовской 2-подгруппы на множестве силовских 2-подгрупп, пересекающихся с этой фиксированной по единичной подгруппе. Привлекаются компьютерные вычисления.

Ключевые слова: конечная простая группа, пересечения силовских 2-подгрупп.

Введение

В работе [1, следствие C] было доказано, что в любой конечной группе G для простого числа p и силовской p-подгруппы P найдутся такие элементы x и y, что $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$, где $O_p(G)$ обозначает наибольшую нормальную p-подгруппу группы G. Так как подгруппа $O_p(G)$ лежит в любой силовской p-подгруппе из G, то изучая пересечения силовских p-подгрупп, можно считать, что $O_p(G) = 1$. Возникает вопрос: при каких условиях на группу G в соотношении $P \cap P^x \cap P^y = 1$ можно обойтись только одним элементом, т. е. когда в группе G найдется такой элемент z, что $P \cap P^z = 1$? В общем случае для простого числа p, равного 2 или числу Мерсенна, можно построить конечную группу G с условием $O_p(G) = 1$, в которой для силовской p-подгруппы P выполнено соотношение $P \cap P^z \neq 1$ для любого $z \in G$. Исторически первые примеры таких групп появились в работе Ито [2] и были разрешимыми группами. В разделе 2 приведены серии таких групп.

Случай неразрешимых групп на протяжении тридцати с лишним лет после работы Ито оставался неисследованным, даже не было опубликовано ни одного примера неразрешимой группы G, в которой $O_p(G) = 1$ и любые две силовские p-подгруппы пересекаются нетривиально. Более того, в работе [3] было доказано, что в любой простой неабелевой группе G для любой силовской подгруппы P из G найдется такой элемент $z \in G$, что $P \cap P^z = 1$. Однако, как показано далее в группе $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(7))$, любые две силовские 2-подгруппы пересекаются нетривиально, хотя $|\mathrm{Aut}\,(L_2(7)) : \mathrm{Inn}\,(L_2(7))| = 2$ и в $\mathrm{Inn}\,(L_2(7)) \simeq L_2(7)$ найдутся две силовские 2-подгруппы, которые пересекаются по единице. Таким образом, рассматривая случай произвольной конечной группы G с условием

© 2009 Зенков В. И., Макосий А. И.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-00148 и № 09-01-00395-а), РФФИ-БРФФИ, проект № 08-01-90006, программы Отделения математических наук РАН и программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

$O_p(G) = 1$, в которой для силовской p-подгруппы P и любого элемента $x \in G$ выполняется условие $P \cap P^x \neq 1$, в первую очередь нужно изучить почти простые группы с этим условием.

Главным инструментом изучения пересечений силовских подгрупп в конечных группах является параметр $l_p(G)$, который мы сейчас введем. Рассмотрим конечную группу G с силовской p-подгруппой P и условием $O_p(G) = 1$. Пусть $X = \{P^g \mid P^g \cap P = 1,\ g \in G\}$. Тогда подгруппа P действует сопряжениями на множестве X. Через $l_p(G)$ обозначим число орбит при этом действии. Тогда, к примеру, в случае простой неабелевой группы G имеем $l_p(G) > 0$, поскольку в G найдется элемент x такой, что $P \cap P^x = 1$, но в то же время $l_2(\mathrm{Aut}\,(L_2(7))) = 0$.

Значение параметра $l_2(G_1)$ для некоторой группы G_1 выясняется в лемме 1, из которой следует, что зная число $l_p(G_1)$, можно вычислить число $l_p(G_1 \wr Z_p)$. В частности, при $l_p(G_1) \geqslant 3$ неравенство $l_p(G_1) \leqslant l_p(G_1 \wr Z_p)$ справедливо для всех простых чисел p, а в случае нечетного простого числа p данное неравенство справедливо даже при $l_p(G_1) \geqslant 2$. С другой стороны, если $l_p(G_1) = 1$ и $N_{G_1}(P_1) = P_1$ для $P_1 \in \mathrm{Syl}_2(G_1)$, то всегда $l_p(G_1 \wr Z_p) = 0$, а при $p = 2$ даже в случае, когда $l_2(G_1) = 2$ и $N_{G_1}(P_1) = P_1$ для $P_1 \in \mathrm{Syl}_2(G_1)$, имеем $l_2(G_1 \wr Z_2) = 1$ и $l_2((G_1 \wr Z_2) \wr Z_2) = 0$. Каков же механизм применения этого параметра? Дело в том, что лемма 5 вместе с примерами из раздела 3 дает вполне удовлетворительную информацию о разрешимой группе G с условием $l_p(G) = 0$. Если разрешимый радикал $S(G)$ группы G нетривиален и $l_p(S(G)) = 0$, то $l_p(G) = 0$ и строение $S(G)$ описывается леммой 5. Пусть $l_p(S(G)) > 0$. Тогда по [1, лемма 3.2] $l_p(G/S(G)) = 0$. Итак, можно считать, что $S(G) = 1$ и $G = E(G)P$. Группа G действует сопряжениями на множестве $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ компонент из $E(G)$ и по [1, лемма 3.14] изоморфно вкладывается при этом в прямое произведение $\prod_{i=1}^{k} \mathrm{Aut}_G(K_i) \wr S_{n_i}$, где k — число G-орбит, n_i — длина, а K_i — представитель i-й орбиты при этом действии, $\mathrm{Aut}_G(K_i)$ — группа индуцированных автоморфизмов компоненты K_i.

Случай нечетного простого числа p полностью рассмотрен в лемме 4. Поэтому можно считать, что $p = 2$ и так как силовская 2-подгруппа из S_n может быть представлена как прямое произведение некоторых сплетений, то и здесь работает описанный выше механизм применения параметра $l_2(G)$. А именно, мы видим, что в группе G с силовской 2-подгруппой P и $S(G) = 1$ условие $l_2(G) = 0$ может выполняться только в случае, когда $l_2(\mathrm{Aut}_G(K_i)) \leqslant 2$ для некоторой компоненты K_i. Следовательно, задача изучения произвольной конечной группы G с условиями $S(G) = 1$ и $l_2(G) = 0$ сводится к изучению почти простых групп K таких, что $l_2(K) \leqslant 2$. В настоящей работе доказана

Теорема. *Пусть K — конечная простая группа, изоморфная $U_3(3)$, $L_3(3)$, $L_4(3)$, $U_4(3)$, $PSp_4(3)$, $PSp_6(3)$, $\Omega_7(3)$, $\Omega_8^-(3)$ или $\Omega_8^+(3)$ и $\mathrm{Inn}\,(K) \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}\,(K)$. Если $l_2(G) \leqslant 2$, то $K \simeq U_3(3)$ или $K \simeq PSp_4(3)$, при этом $l_2(PSp_4(3)) = 1$, $l_2(U_3(3)) = 2$ и $l_2(\mathrm{Aut}\,(PSp_4(3))) = 1$, $l_2(\mathrm{Aut}\,(U_3(3))) = 1$.*

В работе использованы стандартные обозначения, в основном совпадающие с обозначениями из [4].

1. Предварительные сведения

Лемма 1 [1, лемма 3.12]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, G_1 — такая подгруппа из G, что $O_p(G_1) = 1$ и $G = G_1 \wr Z_p$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(**1**) *если $l_p(G_1) \geqslant 3$, то и $l_p(G) \geqslant 3$;*

(**2**) *если* $p = 2$, $l_2(G_1) = 2$ *и* $N_{G_1}(P_1) = P_1$ *для силовской* 2-*подгруппы* P_1 из G_1, то $l_2(G) = 1$;

(**3**) если $l_p(G_1) = 1$ и $N_{G_1}(P_1) = P_1$ для силовской 2-подгруппы P_1 из G_1, то $l_p(G) = 0$.

Лемма 2 [1, лемма 3.6]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, P — силовская p-подгруппа из G, M — p-локальная подгруппа из G, содержащая $N_G(P)$. Если $l_p(M/O_p(M)) \geqslant 3$ и $O_p(M) \cap O_p(M)^x = 1$ для некоторого элемента x из G, то $l_p(G) \geqslant 3$.*

Лемма 3 [1, теорема 8.1]. *Если G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом и каждая компонента из $E(G)$ — спорадическая или знакопеременная группа, отличная от A_5, A_6, A_8, то $l_2(G) \geqslant 3$.*

Лемма 4 [1, теорема 6.1]. *Пусть G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом, p — нечетное простое число, P — силовская p-подгруппа из G. Тогда следующие условия эквиваленты:*

(**1**) *$P \cap P^x \neq 1$ для любого элемента x из G;*

(**2**) *$p = 3$ и группа G содержит нормальную подгруппу N, изоморфную подгруппе K,* где *$(P\Omega_8^+(3))^t < K \leqslant (P\Omega_8^+(3) \leftthreetimes \langle g \rangle)^t$, $t \in N$, и g — графовый автоморфизм порядка три группы $P\Omega_8^+(3)$.*

Лемма 5 [1, теорема B]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, $S(G)$ — разрешимый радикал группы G, P — силовская p-подгруппа из G. Если $P \cap P^x \neq O_p(G)$ для любого элемента x из G, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1. *$(P \cap S(G)) \cap (P \cap S(G))^x \neq O_p(G)$ для любого элемента x из G и в факторгруппе $\overline{S(G)} = S(G)/O_p(G)$ выполняются утверждения одного из следующих пунктов:*

- **(1a)** *$p = 2$, $q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна, $\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $(Z_q \times Z_q) \leftthreetimes D_{2^{n+1}}$, и $D_{2^{n+1}}$ действует точно на $Z_q \times Z_q$;*
- **(1б)** *$p = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна, $\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $F \wr Z_p$,* где *F — группа Фробениуса, изоморфная $V_{p+1} \leftthreetimes Z_p$;*
- **(1в)** *$p = 2, q = 2^n + 1$ — простое число Ферма, $S(G)$ содержит подгруппу, изоморфную $(Z_q \times Z_q) \leftthreetimes Z_4 \circ D_{2^{n+1}}$, и $Z_4 \circ D_{2^{n+1}}$ действует точно на $Z_q \times Z_q$;*
- **(1г)** *$\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8 \leftthreetimes (Z_3 \wr Z_3)$,* где *$|Z(Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8)| = 2$ и $Z_3 \times Z_3$ действует на $Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8$ как подгруппа из $\mathrm{Hol}\,(Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8)$.*

2. *$P \cap S(G) \cap (P \cap S(G))^y = O_p(G)$ для некоторого элемента y из G и в факторгруппе $\widetilde{G} = G/S(G)$ выполняются условия одного из следующих пунктов:*

- **(2а)** *$p = 3$ и группа $\widetilde{G}$ содержит нормальную подгруппу $\widetilde{N}$, изоморфную подгруппе $\widetilde{K}$,* где *$P\Omega_8^+(3) < \widetilde{K} \leqslant (P\Omega_8^+(3) \leftthreetimes \langle g \rangle)^t$, $t \in N$,* где *g — графовый автоморфизм порядка три группы $P\Omega_8^+(3)$;*
- **(2б)** *$p = 2$ и группа $\widetilde{G}$ содержит компоненту, изоморфную одной из следующих групп:*
  - **(2б1)** *простой группе лиева типа над полем из q элементов,* где *$q = 9$ или q — простое число Ферма или Мерсенна;*
  - **(2б2)** *$L_3(4)$, $L_n(2)$, $n \geqslant 3$, $\Omega_n(2)$, $n \geqslant 7$, $F_4(2)$, $E_6(2)$, $E_7(2)$, $E_8(2)$, ${}^2F_4'(2)$.*

2. Примеры

Здесь мы приведем примеры разрешимых и почти простых групп G с $l_2(G) = 0, 1, 2$. Заметим, что главная задача состоит в полном описании таких групп.

2.1. Первая серия. Разрешимые группы.

1. $p = 2$.

а) Пусть $G = Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^k}$, где $2^n + 1 = p$ — простое число Ферма, а $k \leqslant n$, и G — группа Фробениуса. Тогда при $k = n$ имеем $l_2(Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^n}) = 1$, при $k = n - 1$ имеем

$l_2(Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^{n-1}}) = 2$, а при $k \leqslant n-2$ имеем $l_2(Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^k}) \geqslant 3$. Следовательно, по лемме 1 $l_2((Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^n}) \wr Z_2) = 0$, $l_2(((Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^{n-1}}) \wr Z_2) \wr Z_2) = 0$, а при $k \leqslant n-2$ имеем $l_2((Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^k}) \wr Z_2) \geqslant 3$.

б) Пусть $G = (Z_{2^n-1} \times Z_{2^n-1}) \leftthreetimes SD_{2^{n+2}}$, где $SD_{2^{n+2}}$ действует точно на $Z_{2^n-1} \times Z_{2^n-1}$, и $p = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна. Тогда $l_p(G) = 0$.

2. $p = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна. Пусть $G = V_{2^n} \leftthreetimes Z_p$, где G — группа Фробениуса. Тогда $l_p(G) = 1$ и по лемме 1 $l_p(G \wr Z_p) = 0$.

2.2. Вторая серия. Неразрешимые группы.

1. $p = 2$ [1, лемма 3.27]. Пусть $G \simeq S_n$, где $S_n' = A_n$ — знакопеременная группа и $n \geqslant 5$. Тогда:

(1) $l_2(A_5) = l_2(S_5) = l_2(\mathrm{Aut}\,(A_5)) = 1$;
(2а) $l_2(A_6) = 4$;
(2б) $l_2(S_6) = 1$;
(2в) $l_2(PGL_2(9)) = 1$;
(2г) $l_2(PGL_2^*(9)) = 2$;
(2д) $l_2(\mathrm{Aut}\,(A_6)) = 0$;
(3) $l_2(\mathrm{Aut}\,(A_7)) \geqslant 3$;
(4) $l_2(S_7) \geqslant 3$;
(5) $l_2(A_8) = 1$;
(6) $l_2(S_8) = 0$;
(7) $l_2(A_n) \geqslant 3$ и $l_2(S_n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 9$.

2. $p = 2$ [1, лемма 3.18]. Пусть $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(q))$. Тогда:
(1) $l_2(G) = 1$, если $q = 2^n + 1$ — простое число Ферма;
(2) $l_2(G) = 0$, если $q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна;
(3) $l_2(\mathrm{Aut}\,(L_2(9))) = 0$;
(4) $l_2(G) = 1$, если $q = 2$, $q = 4$ или $q = 2^n$, где n — нечетное число;
(5) $l_2(G) \geqslant 3$ во всех остальных случаях.

3. Доказательство теоремы

Пусть $K \simeq U_3(3)$. Так как $\mathrm{Aut}\,(U_3(3)) \simeq G_2(2)$ [4, с. 14], то по лемме 3.13 из [1] $l_2(G_2(2)) = 1$. Вычислим число $l_2(U_3(3))$. Для этого заметим, что число силовских 2-подгрупп из $K \simeq U_3(3)$, которые пересекаются с фиксированной силовской 2-подгруппой P нетривиально, совпадает с числом силовских 2-подгрупп из K, содержащих некоторую инволюцию t из P. Поскольку $P \simeq Z_4 \wr Z_2$ и $\Omega(P) \simeq Z_4 \circ D_8$ [4, с. 14], то подгруппа P содержит семь инволюций, все они сопряжены с центральной инволюцией z и $|\mathrm{Syl}_2(C(z)| = 3$. По формуле для числа m силовских 2-подгрупп из G, содержащих инволюцию z [5, с. 121], имеем $m = |z^G \cap P||C(z)|/|N(P)|$. Так как $C(z) > N(P) = P$, то $|C(Z)|/|P| = |\mathrm{Syl}\,_2(C(z))| = 3$ и $m = 21$.

Согласно [4, с. 14] группа K содержит две максимальные подгруппы $M_1 \simeq C(Z)$, причем $O_2(C(Z)) = \Omega(P)$ и $M_2 \simeq N(V)$, где $V \simeq Z_4 \times Z_4$ и $M_2/V \simeq S_3$. Из строения M_2 следует, что $O_2(M_2)$ содержит три сопряженных в M_2 инволюции, одна из которых равна z. Следовательно, $\Omega(V) < \Omega(P) = O_2(C(Z))$. Таким образом, каждая из двух сопряженных с z инволюций из V добавляет к уже рассмотренным 21 силовской 2-подгруппе из K, содержащих z, еще по 16 силовских 2-подгрупп из G, которые пересекаются с подгруппой P нетривиально. Аналогично оставшиеся четыре инволюции из P добавят к уже рассмотренным по $21 - 3 = 18$ силовских 2-подгрупп из K, которые пересекаются с P нетривиально. Значит, число силовских 2-подгрупп из K, которые пересекаются с подгруппой P не по единице, отличных от P, равно $20 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 18 = 124$. Число всех силовских 2-подгрупп из G равно $|G : N(P)| = 3^3 \cdot 7 = 189$ [4, с. 14]. Значит, число силовских 2-подгрупп из G, которые пересекаются с P по единице, равно $188 - 124 = 64$. Поэтому $l_2(K) = 64/32 = 2$.

Пусть $K \simeq L_3(3)$. Вся необходимая информация о $L_3(3)$ находится в [4, с. 13]. В частности, силовская 2-подгруппа P из K изоморфна SD_{16} — полудиэдральной подгруппе порядка 16, откуда следует, что $\Omega(P) \simeq D_8$ и содержит пять инволюций, которые сопряжены в G с центральной инволюцией z в нормализаторах двух четверных подгрупп V_1 и V_2 из K, где $N(V_1) \simeq N(V_2) \simeq S_4$ и $|\mathrm{Syl}_2(C(z))| = 3$. Следовательно, в данном случае [5, с. 121] $m = |z^G \cap P||C(z)| \,/\, |N(P)| = 5 \cdot 3 = 15$.

Каждая из четырех оставшихся инволюций из P лежит в одной из подгрупп $N(V_1)$ или $N(V_2)$. Следовательно, подгруппа P пересекается нетривиально с $14+4\cdot(15-3) = 62$ силовскими 2-подгруппами из K. Так как число силовских 2-подгрупп в K равно $|G : N(P)| = 3^3 \cdot 13 = 351$, то число силовских 2-подгрупп из K, которые пересекаются с P по единице, равно $350 - 62 = 288$ и $l_2(K) = 288/16 = 18$.

Если мы рассмотрим $\mathrm{Aut}\,(K)$, то $|\mathrm{Aut}\,(K) : \mathrm{Inn}\,(K)| = 2$ и инволюция $t \in \mathrm{Aut}\,(K) \setminus \mathrm{Inn}\,(K)$ является представителем единственного сопряженного класса инволюций в этой разности, причем $C(t) \simeq Z_2 \times S_4$. Поэтому, отождествляя $\mathrm{Inn}\,(K)$ с K и обозначив силовскую 2-подгруппу из $\mathrm{Aut}\,(K)$ через S, имеем $P = S \cap K$ и $C_P(t) = \Omega(P)$. Следовательно, $[t, V_1] = [t, V_2] = 1$. Значит, $|t^P| = 2$ и сопряженная с t в P инволюция t_1 также централизует $\Omega(P)$. Под действием $N(V_1)$ и $N(V_2)$ мы получаем по три сопряженных с t и t_1 инволюции. Кроме того, t действует на подгруппу $Q \simeq Q_8$ из P, централизуя одну из подгрупп порядка четыре из P. Следовательно, t инвертирует каждую из двух оставшихся подгрупп порядка 4 из Q, что дает нам еще шесть инволюций. Таким образом, в $\mathrm{Aut}\,(K) \setminus \mathrm{Inn}\,(K)$ двенадцать инволюций и все они сопряжены. Значит, $m = |t^G \cap S||C(t)| \,/\, |N(S)| = 12 \cdot 16 \cdot 3/32 = 9$.

Так как t и t_1 лежат в $V_1 = O_2(N(V_1)), V_2 = O_2(N(V_2))$ и $O_2(C(z))$, то каждая из них добавляет по две силовских 2-подгруппы из $G = \mathrm{Aut}\,(K)$, которые пересекаются с S по $\langle t_1 \rangle$ или, соответственно, по $\langle t_2 \rangle$. Каждая из оставшихся десяти инволюций лежит в $O_2(C(z))$, но не лежит ни в $O_2(N(V_1))$, ни в $O_2(N(V_2))$. Таким образом, каждая из десяти таких инволюций добавляет $9 - 3 = 6$ различных силовских 2-подгрупп из G, которые пересекаются по подгруппе, порожденной этой инволюцией, и тогда всего с подгруппой S пересекаются нетривиально $62+2\cdot2+10\cdot6 = 126$ силовских 2-подгрупп из G. Значит, число орбит $l_2(G) = (350-126)/32 = 7$. Заметим, что полученные результаты подтверждены и компьютерными вычислениями.

В случае $K \simeq L_4(3)$, $U_4(3)$, $PSp_6(3)$, $\Omega_8^+(3)$ вычисления на компьютере показывают, что $l_2(G) \geqslant 3$.

Пусть $K \simeq \Omega_7(3)$ или $\Omega_8^-(3)$. В обоих случаях G содержит 2-локальную подгруппу M, которая содержит силовскую 2-подгруппу из G, в которой $O_2(M)$ — абелева подгруппа и $M/O_2(M)$ является расширением $U_4(3)$ с помощью 2-подгруппы из $\mathrm{Out}\,(U_4(3))$. Как показано в предыдущем пункте, в этом случае $l_2(M/O_2(M)) \geqslant 3$. Ввиду [1, лемма 3.3] коммутативность $O_2(M)$ влечет, что $O_2(M) \cap O_2(M)^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Теперь по лемме 2 имеем $l_2(G) \geqslant 3$.

В случае $PSp_4(3) \simeq U_4(2)$ по [1, лемма 3.13] $l_2(PSp_4(3)) = 1$. Компьютерные вычисления дают $l_2(\mathrm{Aut}\,(PSp_4(3)) = 1$. Теорема доказана.

Замечание 1. В последнем пункте доказательства теоремы получено равенство $l_2(PSp_4(3)) = l_2(\mathrm{Aut}\,(PSp_4(3))) = 1$.

Пусть $G = \mathrm{Aut}\,(PSp_4(3))$, $K = \mathrm{Inn}\,(PSp_4(3))$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $P = S \cap K \in \mathrm{Syl}_2(K)$. Тогда $N(S) = S$ и по лемме 1 $l_2(G \wr Z_2) = 0$. Однако $N_K(P) \neq P$ и поэтому нарушается условие в пункте (3) леммы 1. И хотя $l_2(K) = 1$, но $l_2(K \wr Z_2) \neq 0$. Действительно, $N_K(P) = P \leftthreetimes \langle f \rangle$, где f — элемент порядка три. Тогда группа $K \wr Z_2$ содержит 2-локальную подгруппу $M \simeq (P \leftthreetimes \langle f \rangle) \wr Z_2$, $O_2(M) \simeq P \times P$ и $M/O_2(M) \simeq Z_3 \wr Z_2$. Так как $l_2(M/O_2(M)) = 1$ и $O_2(M) \cap O_2(M)^x = 1$ для некоторого элемента x из K, то очевидно, что $l_2(K \wr Z_2) > 0$.

В то же время в случае $K \simeq U_3(3)$, $l_2(K) = 2$ и $l_2(\mathrm{Aut}\,(K)) = 1$ и в обоих случаях $N(P) = P$ и $N(S) = S$ для силовских 2-подгрупп из K и $\mathrm{Aut}\,(K)$ соответственно. Тогда по лемме 1 $l_2((K \wr Z_2) \wr Z_2) = l_2(\mathrm{Aut}\,(K) \wr Z_2) = 0$.

Замечание 2. Соответствующие примеры групп G лиева типа с $l_2(G) \leqslant 2$ над полем порядка девять и простыми полями порядков, равных простому числу Ферма или простому числу Мерсенна, приведены в примерах второй серии.

Литература

1. *Зенков В. И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика.—1996.—Т. 2, вып. 1.—С. 1–92.
2. *Ito N.* Über den kleinsten p-Durchschitt auflösbarer Gruppen // Arch. Math.—1958.—Vol. 9, № 1, 2.—P. 27–32.
3. *Зенков В. И., Мазуров В. Д.* О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика.—1996.—Т. 35, № 4.—С. 424–432.
4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.
5. *Кабанов В. В., Кондратьев А. С.* Силовские 2-подгруппы конечных простых групп.—Свердловск: УрО АН СССР, 1979.—144 с.

Статья поступила 17 ноября 2009 г.

Зенков Виктор Иванович
Институт математики и механики УрО РАН,
ведущий научный сотрудник
Россия, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: zenkov@imm.uran.ru

Макосий Алексей Иванович
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
научный сотрудник
Россия, 660036, Красноярск, Академгородок
E-mail: aimakosi@mail.ru