Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 3, С. 3–20

УДК **517.547.2+517.982**

ТЕОРЕМА ДЕЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин, Д. А. Абанина

Рассматриваются весовые пространства целых функций, двойственные пространствам ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа. Основной результат — теорема деления, в которой полностью характеризуются все делители данных пространств. В качестве приложения установлен критерий разрешимости уравнений свертки в классах Берлинга нормального типа.

Ключевые слова: оператор умножения, теорема деления, ультрадифференцируемые функции, оператор свертки.

Введение

Решая задачу о разрешимости уравнений свертки в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций, Л. Эренпрайс [1] установил критерий замкнутости образа оператора умножения на фиксированную функцию (главного идеала) для алгебры целых функций f, рост которых на бесконечности ограничен весом $\exp n\big(|\operatorname{Im} z|+\ln(1+|z|)\big)$ при некотором $n = n(f) \in \mathbb{N}$. Р. Майзе, Б. А. Тейлор и Д. Фогт [2] распространили этот результат на случай пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга минимального типа и соответствующую алгебру $A_{(\omega)}(\mathbb{C})$, задаваемую весами $\exp n(|\operatorname{Im} z|+\omega(|z|))$, где ω — весовая в смысле [3] функция. З. Момм [4] установил критерий замкнутости главных идеалов для весовых алгебр более общего, чем в [2], вида, когда от ω не требуется неквазианалитичность, а $|\operatorname{Im} z|$ заменяется на $v(|\operatorname{Im} z|)$, где v — выпуклая на $[0,\infty)$ функция, для которой $\omega(t) = o(v(t))$ при $t \to \infty$.

Как и во многих других случаях (см., например, [5–7]), во всех упомянутых работах было установлено, что замкнутость образа оператора умножения на данную функцию μ эквивалентна выполнению для μ теоремы деления. Таким образом, в [1, 2, 4] фактически были получены критерии того, что фиксированная функция μ из рассматриваемой алгебры A является делителем A.

В настоящей работе задача описания делителей изучается для пространств целых функций $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, двойственных пространствам $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа. Они задаются весами вида $\exp(n|\operatorname{Im} z|+q_n\omega(|z|))$, где $q_n \uparrow 1$. В отличие от [2] рассматриваются как неквазианалитические, так и квазианалитические веса ω. Принципиально новым моментом по сравнению с [1, 2, 4] является то, что $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ не является алгеброй. В связи с этим сначала дается описание всех мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Затем формулируется основной результат работы — теорема 2, в которой полностью характеризуются делители пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Доказательство теоремы 2 проводится поэтапно в третьем параграфе. Заключительная часть работы посвящена приложениям доказанной теоремы к разрешимости уравнений свертки в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

1. Пространства целых функций и их мультипликаторы

Всюду далее вес ω — это непрерывная неубывающая функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющая условиям:

(α) $\omega(2t) = O\big(\omega(t)\big), \quad t \to \infty;$

(α') $\omega(t) = O(t), \quad t \to \infty;$

(γ) $\ln t = o\big(\omega(t)\big), \quad t \to \infty;$

(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$.

Если дополнительно известно, что

$$(\beta) \qquad \int\limits_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt < \infty,$$

то вес ω называется *неквазианалитическим*; в противном случае — *квазианалитическим*. Без ограничения общности считаем, что $\omega(1) = 0$.

Отметим нужные для дальнейшего изложения свойства весовых функций. Из (α') с учетом $\omega(1) = 0$ вытекает, что при некотором $A > 0$

$$\omega(t) \leqslant At, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

В [8, неравенство (5)] доказано, что при том же A

$$\omega(t+1) - \omega(t) \leqslant Ae^2, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Условие (α), очевидно, эквивалентно тому, что при некотором $K > 0$

$$\omega(x+y) \leqslant K\big(\omega(x) + \omega(y) + 1\big), \quad x, y \geqslant 0. \tag{3}$$

Наконец, как известно [2, лемма 1.10; 9, лемма 2.2],

$$\lim_{r \to 1+0} \limsup_{t \to \infty} \frac{\omega(rt)}{\omega(t)} = 1. \tag{4}$$

Обозначим $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Для положительных чисел q и l определим банахово пространство целых функций

$$H_{\omega,q,l} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty \right\}$$

и положим

$$H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \bigcup_{q \in (0,1)} \bigcup_{l \in (0,\infty)} H_{\omega,q,l}(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_{\omega,q_n,n}(\mathbb{C}),$$

где $q_n \uparrow 1$. Будем рассматривать пространство $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ с его естественной топологией внутреннего индуктивного предела $\operatorname*{ind}_n H_{\omega,q_n,n}(\mathbb{C})$.

Основная цель настоящего параграфа — дать описание всех мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Напомним, что целая функция μ называется мультипликатором $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, если $\mu \cdot H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \subset H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, где $\mu \cdot H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \{\mu f : f \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\}$. Заметим, что каждый такой мультипликатор является непрерывным, т. е. соответствующий ему оператор умножения $\Lambda_\mu : f \to \mu f$ действует из $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ в $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ непрерывно. В самом деле, топология $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, очевидно, мажорирует топологию поточечной сходимости в $\mathbb{C}$. Поэтому $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ отделимо и, значит, является отделимым ультраборнологическим пространством (пространством типа (β) в терминологии Д. А. Райкова [10, приложение 1, с. 225]). Одновременно оно относится к классу $\mathscr{U}\mathscr{F}$ отделимых локально выпуклых пространств, покрываемых счетным числом своих подпространств Фреше. В соответствии с известным результатом А. Гротендика [10, приложение 1, теорема 2]) для пространств этого класса справедлива теорема о замкнутом графике. Из сказанного, как отмечено в [11, § 2], следует непрерывность произвольного мультипликатора $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Это обстоятельство позволяет нам применить общие результаты Ю. Ф. Коробейника из [12] об описании непрерывных мультипликаторов внутренних индуктивных пределов весовых нормированных пространств.

Теорема 1. *Множество всех мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ совпадает с пространством целых функций*

$$M^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} H_{\omega,\varepsilon,l}(\mathbb{C}) = \Big\{\mu \in H(\mathbb{C}):\ (\forall\,\varepsilon > 0)\ (\exists\, l \in \mathbb{N})\ \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,l} < \infty\Big\}.$$

$\lhd$ Положим $f_n(z) := \exp(q_n\omega(z)+n|\operatorname{Im} z|)$, $n \in \mathbb{N}$, и обозначим через $SH(\mathbb{C})$ множество всех субгармонических в $\mathbb{C}$ функций. Из условия (δ) на вес ω следует, что $\omega(z) \in SH(\mathbb{C})$. Так как функция $|\operatorname{Im} z|$ также субгармонична в $\mathbb{C}$, то $\ln f_n \in SH(\mathbb{C})$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

В силу (2),

$$f^0_n(z) := \sup_{|w|\leqslant 1} f_n(z + w) = \exp \sup_{|w|\leqslant 1} \big(q_n\omega(|z + w|) + n|\operatorname{Im}(z + w)|\big)$$
$$\leqslant \exp\big(q_n\omega(|z| + 1) + n(|\operatorname{Im} z| + 1)\big) \leqslant \exp\big(q_n(\omega(z) + Ae^2) + n(|\operatorname{Im} z| + 1)\big) = C^1_n\, f_n(z),$$

где $C^1_n := \exp\left(q_nAe^2 + n\right)$. А из (γ) вытекает, что при некоторых постоянных $C^2_n > 0$

$$\big(1 + |z|^2\big)^2 \leqslant C^2_n \exp\big(q_{n+1} - q_n\big)\, \omega(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому

$$(1 + |z|^2)^2 f^0_n(z) \leqslant C^1_n\, C^2_n\, f_{n+1}(z), \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для весовой последовательности $(f_n)^\infty_{n=1}$ выполнены все условия предложения 5 из [12]. Применив его вместе с предложением 3 из [12], получим, что множеством всех (непрерывных) мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является

$$\left\{\mu \in H(\mathbb{C}):\ (\forall\, n)\ (\exists\, m)\ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|f_n(z)}{f_m(z)} < \infty\right\},$$

которое, как нетрудно видеть, совпадает с $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\rhd$

В заключение текущего параграфа приведем техническую лемму, которая будет использоваться в последующем изложении.

Лемма 1. *В определении пространств $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ можно заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.*

$\lhd$ В случае $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ утверждение леммы легко получается из неравенств (1) и (3), поскольку при любых $\varepsilon, l \in (0,\infty)$ и всех $z \in \mathbb{C}$

$$\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon\omega(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) + l|\operatorname{Im} z|$$
$$\leqslant \varepsilon K\big(\omega(\operatorname{Re} z) + \omega(\operatorname{Im} z) + 1\big) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon K\omega(\operatorname{Re} z) + (\varepsilon KA + l)|\operatorname{Im} z| + \varepsilon K.$$

В случае $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ придется еще воспользоваться равенством (4) и рассмотреть отдельно две ситуации. Зафиксируем s и s': $0 < s < s' < 1$ и $l > 0$. В силу (4) существует такое $\delta > 0$, что
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega\big((1+\delta)t\big)}{\omega(t)} < \frac{s'}{s}.$$
Значит, найдется $C > 0$ такое, что
$$\omega\big((1+\delta)t\big) \leqslant \frac{s'}{s}\,\omega(t) + C, \quad t \geqslant 0.$$
Тогда, если $z \in \mathbb{C}$ таково, что $|\operatorname{Im} z| \leqslant \delta|\operatorname{Re} z|$, то
$$s\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant s\omega(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) + l|\operatorname{Im} z|$$
$$\leqslant s\omega\big((1+\delta)\operatorname{Re} z\big) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant s'\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| + C.$$
Если же $|\operatorname{Im} z| > \delta|\operatorname{Re} z|$, то, воспользовавшись (1), получим:
$$s\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant sA|z| + l|\operatorname{Im} z|$$
$$\leqslant sA\big(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|\big) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant \left(sA\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + l\right)|\operatorname{Im} z|.$$
Таким образом, при всех $z \in \mathbb{C}$
$$s\omega(z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant s'\omega(\operatorname{Re} z) + \left(sA\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + l\right)|\operatorname{Im} z| + C.$$
Отсюда и из очевидного неравенства $\omega(\operatorname{Re} z) \leqslant \omega(z)$ следует требуемое утверждение для $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\triangleright$

2. Делители пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$

Делителем пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ называется такой его нетривиальный мультипликатор μ, для которого справедлива теорема деления:
$$f \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}), \quad \frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C}) \ \Rightarrow\ \frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}).$$

Сформулируем критерий, содержащий полное описание делителей пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Теорема 2. *Пусть ω — весовая функция, а μ — нетривиальный мультипликатор пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) μ — делитель $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$;

(ii) образ оператора умножения $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнут в $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$;

(iii) $(\forall\,\varepsilon > 0)$ $(\forall\,\delta > 0)$ $(\exists\, r_0 > 0)$ $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant r_0)$ $(\exists\, w \in \mathbb{C})$:
$$|w - x| \leqslant \delta\omega(x), \quad |\mu(w)| \geqslant e^{-\varepsilon\omega(w)};$$

(iv) $(\forall\,\varepsilon > 0)$ $(\forall\,\delta > 0)$ $(\exists\, r_0 > 0)$ $(\exists\, C > 0)$ $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant r_0)$ $(\exists\, t \in \mathbb{R},\ |t| > |x|)$:
$$|t - x| \leqslant \delta\omega(x), \quad |\mu(t)| \geqslant Ce^{-\varepsilon\omega(t)};$$

(v) $(\forall\,\varepsilon>0)$ $(\exists\,\delta_\varepsilon>0)$ $(\forall\,\delta\in(0,\delta_\varepsilon))$ $(\exists\,r_0>0)$ $(\exists\,L>0)$ $(\exists\,c>0)$ $(\forall\,z\in\mathbb{C},\ |z|\geqslant r_0)$ *найдется окружность* C_z*, содержащая точку* z *внутри себя и обладающая следующими свойствами:*

(a) *если* $|\operatorname{Im} z|\leqslant\delta\omega(\operatorname{Re} z)$*, то для всех* $\zeta\in C_z$

$$|\operatorname{Re}\zeta-\operatorname{Re} z|\leqslant 6\delta\omega(\operatorname{Re} z),\quad |\operatorname{Im}\zeta|\leqslant 6\delta\omega(\operatorname{Re} z),\quad |\mu(\zeta)|\geqslant ce^{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)};$$

(b) *если* $|\operatorname{Im} z|>\delta\omega(\operatorname{Re} z)$*, то для всех* $\zeta\in C_z$

$$|\operatorname{Re}\zeta-\operatorname{Re} z|\leqslant|\operatorname{Im} z|,\quad |\operatorname{Im}\zeta-\operatorname{Im} z|\leqslant|\operatorname{Im} z|,\quad |\mu(\zeta)|\geqslant ce^{-L|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Таким образом, для пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнутость образа оператора умножения на мультипликатор μ эквивалентна выполнению для μ теоремы деления (при этом существенной является справедливость импликации $(ii)\Rightarrow(i)$, поскольку утверждение $(i)\Rightarrow(ii)$ носит общий характер). Условие (iii) означает, что вблизи каждой достаточно большой по модулю вещественной точки найдется близкая относительно веса ω точка w комплексной плоскости, в которой делитель μ имеет оценку снизу, в определенном смысле мало отличающуюся от оценки μ сверху как мультипликатора. В условии (iv), занимающем в теореме 2 центральное место, утверждается, что точка w может быть выбрана вещественной. В свою очередь, условие (v) говорит о том, что каждую точку плоскости можно окружить целой окружностью малого относительно весов $q_n\omega(z)+n|\operatorname{Im} z|$ радиуса, на которой выполняется нужная для справедливости теоремы деления оценка снизу для μ.

3. Доказательство основного результата

В данном параграфе проводится доказательство теоремы 2. Ввиду технической сложности оно разбито на отдельные леммы, часть из которых представляет самостоятельный интерес.

Как уже отмечалось выше, утверждение $(i)\Rightarrow(ii)$ в теореме 2 следует из общих соображений и, как известно, справедливо для нетривиальных мультипликаторов произвольного локально выпуклого пространства целых функций, топология которого мажорирует топологию равномерной сходимости на компактах $\mathbb{C}$.

Чтобы доказать справедливость импликации $(ii)\Rightarrow(iii)$, сначала устанавливается функциональный критерий замкнутости образа оператора умножения на нетривиальный мультипликатор пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Затем по субгармонической функции $|\operatorname{Im} z|$ и произвольному кругу $K_{a,R}$ с помощью процедуры выметания масс строится новая субгармоническая функция, которая совпадает с $|\operatorname{Im} z|$ вне этого круга и имеет максимально возможное значение в его центре $z=a$. Это позволяет воспользоваться методом, предложенным для доказательства подобных импликаций О. В. Епифановым [6] и В. А. Ткаченко [7], а также результатами А. В. Абанина из [13, 14] о существовании специальных семейств целых функций с заданными значениями в фиксированных точках и равномерными оценками во всей плоскости.

Лемма 2. *Пусть* ω *— весовая функция и* μ *— фиксированный нетривиальный мультипликатор из* $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$*. Следующие условия эквивалентны:*

(i_1) *образ оператора* $\Lambda_\mu: H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *замкнут в* $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$*;*

(i_2) $\Lambda_\mu: H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *— топологический изоморфизм «в»;*

(i_3) *если семейство* $B \subset H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *таково, что множество* $\mu \cdot B$ *содержится и ограничено в некотором* $H_{\omega,q_n,n}(\mathbb{C})$, *то найдется* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что* B *содержится и ограничено в* $H_{\omega,q_m,m}(\mathbb{C})$;

(i_4) *для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют* $m \in \mathbb{N}$ *и* $C > 0$ *такие, что при всех* $f \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q_m\omega(z) + m|\operatorname{Im} z|\big)} \leqslant C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)\, f(z)|}{\exp\big(q_n\omega(z) + n|\operatorname{Im} z|\big)}.$$

$\lhd$ $(i_1) \Rightarrow (i_2)$. Из теоремы единственности для аналитических функций следует, что оператор $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ инъективен. Далее, так как

$$\frac{q_n\omega(z) + n|\operatorname{Im} z|}{q_{n+1}\omega(z) + (n+1)|\operatorname{Im} z|} \to 0, \quad z \to \infty,$$

то $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ относится к классу (DFS) локально выпуклых пространств (по поводу (DFS)-пространств см. обзор В. В. Жаринова [15]; в терминологии работы [16] их называют (LN*)-пространствами). Если $\Lambda_\mu\big(H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\big)$ — замкнутое подпространство в $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то, как известно [17, теорема 4], оно само будет (DFS)-пространством, а следовательно, и отделимым ультраборнологическим пространством. Тогда по теореме А. Гротендика [10, приложение 1, теорема 2] отображение $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to \Lambda_\mu\big(H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\big)$ открыто. Из сказанного заключаем, что $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — топологический изоморфизм «в».

Импликация $(i_2) \Rightarrow (i_1)$ тривиальна.

$(i_2) \Rightarrow (i_3)$. Пусть $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — топологический изоморфизм «в». Тогда обратный оператор $\Lambda_\mu^{-1} : \Lambda_\mu\big(H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\big) \to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ непрерывен и, следовательно, переводит ограниченные множества в ограниченные. Поскольку $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — (DFS)-пространство, то в нем множество ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится и ограничено в некотором $H_{\omega,q_m,m}(\mathbb{C})$. Отсюда легко получаем (i_3).

$(i_3) \Rightarrow (i_2)$. Эта импликация стандартным образом вытекает из леммы А. Баернстейна [18].

Остается заметить, что (i_4) — это лишь другая форма записи условия (i_3). $\rhd$

Замечание. Из доказательства леммы 1 следует, что в лемме 2 можно всюду заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.

Лемма 3. *Пусть* $u(z) := |\operatorname{Im} z|$, $a \in \mathbb{R}$, $R > 0$ *и* $K_{a,R} := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$. *Тогда функция* $U(z)$, *определяемая равенством*

$$U(z) = \begin{cases} u(z), & |z-a| \geqslant R, \\ \frac{R^2-r^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{u(a+Re^{i\theta})\,d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}, & z = a + re^{i\varphi}, \\ & 0 \leqslant r < R,\ \varphi \in [0, 2\pi), \end{cases}$$

непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, *гармонична в* $K_{a,R}$ *и обладает следующими свойствами:*

(a) $U(a) = \frac{2}{\pi} R$;

(b) $U(a - r) = U(a + r) < \frac{2}{\pi} R$ *при всех* $r \in (0, R)$;

(c) $U(z) \leqslant \frac{2}{\pi} R + |\operatorname{Im} z|$ *для любых* $z \in K_{a,R}$.

◁ Функция $U(z)$ получена из субгармонической в $\mathbb{C}$ функции $u(z)$ за счет выметания масс на границу круга $K_{a,R}$. Поэтому $U(z)$ субгармонична в $\mathbb{C}$ и гармонична в $K_{a,R}$. Равенство (a) получается прямым подсчетом из определения $U(z)$:

$$U(a) = \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{Im}(a + R\, e^{i\theta})|}{R^2}\, d\theta = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta = \frac{2}{\pi}\, R.$$

Докажем (b). Пусть $r \in (0, R)$. Легко видеть, что

$$U(a \pm r) = \frac{R^2 - r^2}{\pi r} \ln \frac{R + r}{R - r}.$$

Отсюда, использовав, что $\ln \frac{t+1}{t-1} < \frac{2t}{t^2-1}$ при всех $t > 1$, получаем требуемое.

Чтобы доказать (c), заметим, что на окружности $|z - a| = R$ выполняется равенство $U(z) = |\operatorname{Im} z|$, а на интервале действительной оси $(a - R, a + R)$ — неравенство (b). Следовательно, всюду на границе как верхнего, так и нижнего полукруга

$$U(z) \leqslant \frac{2}{\pi}\, R + |\operatorname{Im} z| \quad \text{или} \quad U(z) - |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{2}{\pi}\, R.$$

Так как функция $U(z) - |\operatorname{Im} z|$ гармонична в обоих этих полукругах, то по принципу максимума $U(z) - |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{2}{\pi}\, R$ всюду в $K_{a,R}$. ▷

Лемма 4. $(ii) \Rightarrow (iii)$.

◁ Пусть оператор $\Lambda_\mu : H^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ имеет замкнутый образ. Предположим, что условие (iii) не выполняется, т. е. что имеются числа $\varepsilon_0, \delta_0 \in (0, 1)$ и последовательность $(a_j)_{j=1}^\infty$ вещественных чисел с $|a_j| \uparrow \infty$ такие, что для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$|\mu(w)| < e^{-\varepsilon_0 \omega(w)} \quad \big(w \in \mathbb{C},\ |w - a_j| \leqslant \delta_0 \omega(a_j)\big). \tag{5}$$

Для определенности предположим, что $a_j > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\delta_0 < \frac{1}{2A}$, где постоянная A определяется условием (1), и что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\omega\left(\left(1 - \frac{\delta_0 A}{2}\right) t\right)} < 1 + \frac{\varepsilon_0}{2}$$

(последнее возможно в силу (4)). Тогда существует такое $t_0 > 0$, что

$$\omega(t) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \omega\left(\left(1 - \frac{\delta_0 A}{2}\right) t\right), \quad t \geqslant t_0.$$

Проредим, если это необходимо, последовательность $(a_j)_{j=1}^\infty$ и, не меняя обозначений, будем предполагать, что $a_1 > t_0$ и $a_{j+1} > 3a_j$ $(j \in \mathbb{N})$. Первое неравенство обеспечит то, что

$$\omega(a_j) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \omega\left(\left(1 - \frac{\delta_0 A}{2}\right) a_j\right), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

а второе — то, что круги $|w - a_j| \leqslant \delta_0 \omega(a_j)$, $j \in \mathbb{N}$, в которых имеется быстрое относительно ω убывание мультипликатора μ (см. оценки (5)), не будут пересекаться. Действительно, так как $\delta_0 < \frac{1}{2A}$, то

$$\begin{aligned} a_{j+1} - \delta_0\omega(a_{j+1}) - (a_j + \delta_0\omega(a_j)) &\geqslant a_{j+1} - a_j - \delta_0 A(a_{j+1} + a_j) \\ &\geqslant (a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{2}\,(a_{j+1} + a_j) = \frac{1}{2}\,(a_{j+1} - 3a_j) > 0. \end{aligned}$$

1) Осуществляем процедуру выметания масс для субгармонической функции $u(z) = \frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|$ и круга K_{a_j,R_j}, где $R_j = \frac{\delta_0}{2}\,\omega(a_j)$. В результате, в соответствии с леммой 3, получим функцию U_j, непрерывную и субгармоническую в $\mathbb{C}$, гармоническую в K_{a_j,R_j} и удовлетворяющую условиям:

$$
\begin{aligned}
&U_j(z) = \frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|, \quad \text{если } |z-a_j| \geqslant R_j;\\
&U_j(a_j) = \omega(a_j);\\
&U_j(z) \leqslant \omega(a_j) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|, \quad \text{если } |z-a_j| < R_j.
\end{aligned}
$$

Тогда, так как в силу (6) при всех $z \in \mathbb{C}$ с $|z-a_j| < R_j$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(z) &\geqslant \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(a_j - R_j) = \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega\left(a_j - \frac{\delta_0}{2}\,\omega(a_j)\right)\\
&\geqslant \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega\left(\left(1-\frac{\delta_0 A}{2}\right)a_j\right) \geqslant \omega(a_j),
\end{aligned}
$$

то

$$
U_j(z) \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}
$$

2) Использовав лемму 1 из [14] (она является уточнением леммы 4 из [13]), по субгармонической функции $U_j(z)$ и точке a_j построим целую функцию f_j такую, что

$$
f_j(a_j) = \exp U_j(a_j) = \exp \omega(a_j); \tag{8}
$$

$$
|f_j(z)| \leqslant \widetilde{A}(1+|z|^2)^2 \exp U_j^1(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{9}
$$

где $U_j^1(z) := \sup\limits_{|w|\leqslant 1} U_j(z+w)$, а $\widetilde{A}$ — абсолютная постоянная, которая от j не зависит.

Заметим, что в силу условия (γ) на вес ω найдется $\widetilde{C} > 0$ такое, что

$$
\left(1+|z|^2\right)^2 \leqslant \widetilde{C} \exp \frac{\varepsilon_0}{4}\omega(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{10}
$$

и продолжим оценку (9) отдельно для $z \in K_{a_j,2R_j}$ и $z \notin K_{a_j,2R_j}$. Без ограничения общности будем далее предполагать, что $R_1 = \frac{\delta_0}{2}\,\omega(a_1) > 1$. Тогда все $R_j > 1$ и, значит, $K_{a_j,2R_j}$ содержит 1-расширение K_{a_j,R_j}.

а) Если $|z-a_j| \geqslant 2R_j$, то для всех w с $|w| \leqslant 1$ точка $z+w$ находится вне K_{a_j,R_j}, так что

$$
U_j(z+w) = \frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im}(z+w)| \leqslant \frac{\pi}{\delta_0}\,(|\operatorname{Im} z| + 1)
$$

и, соответственно, $U_j^1(z) \leqslant \frac{\pi}{\delta_0}\,(|\operatorname{Im} z| + 1)$. Подставляя эту оценку и (10) в (9), получаем, что

$$
|f_j(z)| \leqslant C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\,\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|\right), \quad |z-a_j| \geqslant 2R_j, \tag{11}
$$

где $C_1 := \widetilde{A}\,\widetilde{C} \exp \frac{\pi}{\delta_0}$.

б) В случае, когда $|z-a_j| < 2R_j$, воспользуемся оценкой (7) и неравенством (2). Для $w \in \mathbb{C}$ с $|w| \leqslant 1$ имеем:

$$
\begin{aligned}
U_j(z+w) &\leqslant \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(z+w) + \frac{\pi}{\delta_0}\,\bigl|\operatorname{Im}(z+w)\bigr|\\
&\leqslant \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(|z|+1) + \frac{\pi}{\delta_0}\,\bigl(|\operatorname{Im} z| + 1\bigr)\\
&\leqslant \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}|\operatorname{Im} z| + \left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)A\,e^2 + \frac{\pi}{\delta_0}.
\end{aligned}
$$

Возвращаясь к (9) и снова используя (10), получаем:

$$|f_j(z)| \leqslant C_2 \exp\left(\left(1+\frac{3\varepsilon_0}{4}\right)\omega(z)+\frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|\right), \quad |z-a_j|<2R_j, \tag{12}$$

где $C_2 := \widetilde{A}\,\widetilde{C}\exp\left(\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)A\,e^2+\frac{\pi}{\delta_0}\right)$.

3) Покажем, что для семейства $\{f_j : j\in\mathbb{N}\}$ нарушается условие (i_3) критерия замкнутости в $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ образа $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ (см. лемму 2).

В первую очередь заметим, что из (11) следует, что $f_j\in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ при всех $j\in\mathbb{N}$. Далее, в силу (8) для любого $m\in\mathbb{N}$

$$\|f_j\|_{\omega,q_m,m} = \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f_j(z)|}{\exp\left(q_m\,\omega(z)+m|\operatorname{Im} z|\right)} \geqslant \frac{|f_j(a_j)|}{\exp q_m\,\omega(a_j)}$$
$$= \exp\left((1-q_m)\,\omega(a_j)\right)\to+\infty, \quad j\to\infty.$$

Поэтому семейство $\{f_j : j\in\mathbb{N}\}$ не ограничено ни в одном $H_{\omega,q_m,m}(\mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь семейство $\{\mu\, f_j : j\in\mathbb{N}\}$. Так как $\mu\in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдутся $C_3>0$ и $n_0\in\mathbb{N}$ такие, что

$$|\mu(z)|\leqslant C_3\exp\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\,\omega(z)+n_0|\operatorname{Im} z|\right), \quad z\in\mathbb{C}.$$

Тогда с учетом (11)

$$|\mu(z)f_j(z)|\leqslant C_1\,C_3\exp\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\,\omega(z)+\left(n_0+\frac{\pi}{\delta_0}\right)|\operatorname{Im} z|\right), \quad |z-a_j|\geqslant 2R_j=\delta_0\omega(a_j),$$

а с учетом (5) и (12)

$$|\mu(z)f_j(z)|\leqslant C_2\exp\left(\left(1-\frac{\varepsilon_0}{4}\right)\omega(z)+\frac{\pi}{\delta_0}\,|\operatorname{Im} z|\right), \quad |z-a_j|<\delta_0\omega(a_j).$$

Выбрав номер n так, чтобы $q_n>1-\frac{\varepsilon_0}{4}$ и $n>n_0+\frac{\pi}{\delta_0}$, получим отсюда, что при каждом $j\in\mathbb{N}$

$$|\mu(z)f_j(z)|\leqslant C\exp\left(q_n\omega(z)+n|\operatorname{Im} z|\right), \quad z\in\mathbb{C},$$

где $C:=\max\{C_1\,C_3, C_2\}$. Значит, семейство $\{\mu f_j : j\in\mathbb{N}\}$ ограничено в $H_{\omega,q_n,n}(\mathbb{C})$.

Таким образом, не выполнено условие (i_3) леммы 2, что противоречит замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ в $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\triangleright$

Для доказательства следующих двух импликаций нам потребуется теорема об оценке снизу модуля аналитической в круге функции [19, гл. 1, теорема 11] в удобной для нас форме, приведенной в лемме 2 работы [4].

Лемма 5. *Пусть $0<r<R$ и $a\in\mathbb{C}$. Предположим, что функция F аналитична в круге $|z-a|\leqslant 2eR$ и $F(a)\neq 0$. Тогда существует ρ с $r<\rho<R$ такое, что*

$$\min_{|\zeta-a|=\rho}|F(\zeta)|\geqslant |F(a)|^{H+1}\left(\max_{|\zeta-a|=2eR}|F(\zeta)|\right)^{-H},$$

где $H:=2+\ln\left(24e/\left(1-\frac{r}{R}\right)\right)$.

Лемма 6. *(iii) ⇒ (iv).*

$\triangleleft$ Пусть выполнено (iii). Зафиксируем $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ и возьмем какое-нибудь $\gamma \in \left(0, \frac{\varepsilon}{8KH}\right)$, где константа K определяется условием (3), а $H := 3 + \ln 48$. Поскольку $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдутся $C > 0$ и $l > 0$ такие, что

$$|\mu(z)| \leqslant Ce^{\gamma\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{13}$$

Далее, выберем положительные числа ε_1 и δ_1 так, чтобы

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{4(H+1)}, \quad \delta_1 < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2Hl(1+4e)}, \frac{\delta}{3}, \frac{1}{4eA}\right\}.$$

В силу (iii) для ε_1 и δ_1 найдется такое $r_0 > 0$, что, если $x \in \mathbb{R}$ и $|x| \geqslant r_0$, то имеется $w \in \mathbb{C}$, для которого

$$|w - x| \leqslant \delta_1\omega(x), \quad |\mu(w)| \geqslant e^{-\varepsilon_1\omega(w)}. \tag{14}$$

Обозначим для удобства $|w - x| =: r$, $r \leqslant \delta_1\omega(x)$.

Применим к функции μ лемму 5, взяв данное r, $R = 2r$ и точку w в качестве a. Получим, что при некотором ρ, $r < \rho < 2r$,

$$\min_{|\zeta - w| = \rho} |\mu(\zeta)| \geqslant |\mu(w)|^{H+1}\left(\max_{|\xi - w| = 4er}|\mu(\xi)|\right)^{-H}.$$

Окружность $|\zeta - w| = \rho$ пересекает действительную ось в двух точках. Обозначим большую из них по модулю через t. Тогда $|t| > |x|$, так что $r \leqslant \delta_1\omega(x) \leqslant \delta_1\omega(t)$.

Покажем, что данная точка t является искомой. Действительно, первое из двух нужных в (iv) неравенств уже выполнено:

$$|t - x| \leqslant |t - w| + |w - x| = \rho + r < 3r \leqslant 3\delta_1\omega(x) < \delta\omega(x).$$

Установим теперь второе неравенство. Имеем, что

$$|\mu(t)| \geqslant |\mu(w)|^{H+1}\Big(\max_{|\xi - w| = 4er}|\mu(\xi)|\Big)^{-H}. \tag{15}$$

Из геометрических соображений ясно, что $|w| \leqslant |t|$, так что $\omega(w) \leqslant \omega(t)$ и, соответственно,

$$|\mu(w)| \geqslant e^{-\varepsilon_1\omega(t)}. \tag{16}$$

Далее, пусть ξ таково, что $|\xi - w| = 4er$. Имеем, что

$$|\xi| \leqslant |w| + |w - \xi| = |w| + 4er \leqslant |t| + 4e\delta_1\omega(t) \leqslant (1 + 4e\delta_1 A)|t| \leqslant 2|t|,$$

а $|\operatorname{Im}\xi| \leqslant |\operatorname{Im} w| + 4er \leqslant r + 4er \leqslant (1+4e)\delta_1\omega(t)$. Поэтому $\omega(\xi) \leqslant 2K\omega(t) + K$, так что из (13) следует, что

$$|\mu(\xi)| \leqslant C_1 e^{(2K\gamma + (1+4e)\delta_1 l)\omega(t)},$$

где $C_1 := Ce^{K\gamma}$. Подставляя последнюю оценку и (16) в (15), заключаем, что

$$|\mu(t)| \geqslant C_2 e^{-(\varepsilon_1(H+1) + 2K\gamma H + (1+4e)\delta_1 lH)\omega(t)},$$

где $C_2 := C_1^{-H}$. В силу выбора чисел ε_1, δ_1 и γ

$$\varepsilon_1(H+1) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 2K\gamma H < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (1+4e)\delta_1 lH < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $|\mu(t)| \geqslant C_2 e^{-\varepsilon\omega(t)}$, что и требовалось. $\triangleright$

Следующий шаг — это доказательство импликации $(iv) \Rightarrow (v)$. Именно, произвольную точку z плоскости необходимо окружить окружностью, на которой μ имеет подходящую оценку снизу. В отличие от [2] и [4] рассуждения приходится проводить по-разному, в зависимости от того, что имеет большее значение: $\omega(\operatorname{Re} z)$ или $|\operatorname{Im} z|$.

Лемма 7. $(iv) \Rightarrow (v)$.

$\lhd$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть, как и выше, $H := 3 + \ln 48$, а константы A и K определяются условиями (1) и (3). Возьмем γ так, чтобы $0 < \gamma < \frac{\varepsilon}{4H(2K^2+K)}$, и найдем для мультипликатора μ числа C и l такие, что

$$|\mu(w)| \leqslant Ce^{\gamma\omega(\operatorname{Re} w)+l|\operatorname{Im} w|} \quad (w \in \mathbb{C}). \tag{17}$$

Пусть $\delta_\varepsilon := \min\left\{\frac{\varepsilon}{64KHel}, \frac{1}{8eA}\right\}$, а $\delta < \delta_\varepsilon$. Далее, выберем ε_1 так, чтобы $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{8K(H+1)}$, и в соответствии с (iv) найдем по ε_1 и δ такие r_0 и C_0, что для любого $x \in \mathbb{R}$ с $|x| \geqslant r_0$ существует $t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$, для которого

$$|t - x| \leqslant \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geqslant C_0 e^{-\varepsilon_1\omega(t)}. \tag{18}$$

Зафиксируем произвольное $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и предположим сначала, что $|x| \geqslant r_0$. Тогда для этого x имеется $t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$, для которого выполняется (18). Обозначив $r := |z - t|$, получим, что

$$r \leqslant |y| + |t - x| \leqslant |y| + \delta\omega(x).$$

Рассмотрим отдельно два случая.

I. $|y| \leqslant \delta\omega(x)$. Тогда

$$r \leqslant 2\delta\omega(x) \leqslant 2\delta\omega(t) \leqslant 2\delta A|t| \leqslant \frac{1}{4e}\,|t|. \tag{19}$$

Применив лемму 5 к функции μ, данному r, $R = 2r$ и точке t в качестве a, найдем ρ, $r < \rho < 2r$, такое, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - t| = \rho$ справедливо неравенство

$$|\mu(\zeta)| \geqslant |\mu(t)|^{H+1}\left(\max_{|\xi-t|=4er}|\mu(\xi)|\right)^{-H}. \tag{20}$$

Покажем, что в данной ситуации в качестве C_z можно взять окружность $\{\zeta : |\zeta - t| = \rho\}$. Ясно, что z лежит внутри нее. Рассмотрим любое $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - t| = \rho$. Заметим, прежде всего, что

$$|\operatorname{Re}\zeta - x| \leqslant |\operatorname{Re}\zeta - t| + |t - x| \leqslant \rho + r \leqslant 3r \leqslant 6\delta\omega(x),$$
$$|\operatorname{Im}\zeta| \leqslant \rho \leqslant 2r \leqslant 4\delta\omega(x) \leqslant 6\delta\omega(x),$$

т. е. первые два неравенства в $(v)(a)$ выполнены. Остается доказать третье неравенство в $(v)(a)$.

Сначала оценим $|\mu(t)|$ через $\omega(\operatorname{Re}\zeta)$. Так как с учетом (19)

$$|\operatorname{Re}\zeta| \geqslant |t| - \rho \geqslant |t| - 2r \geqslant |t| - \frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{2},$$

то $|t| \leqslant 2|\operatorname{Re}\zeta|$ и $\omega(t) \leqslant 2K\omega(\operatorname{Re}\zeta) + K$. Поэтому из второго неравенства в (18) получаем, что

$$|\mu(t)| \geqslant C_1 e^{-2\varepsilon_1 K\omega(\operatorname{Re}\zeta)}, \tag{21}$$

где $C_1 := C_0 e^{-\varepsilon_1 K}$.

Теперь оценим $|\mu(\xi)|$, когда $|\xi - t| = 4er$. Используя (17) и оценку $|t| \leqslant 2|\operatorname{Re}\zeta|$, имеем:

$$|\operatorname{Re}\xi| \leqslant |t| + 4er \leqslant 2|t| \leqslant 4\,|\operatorname{Re}\zeta|,$$
$$|\operatorname{Im}\xi| \leqslant 4er \leqslant 8e\delta\omega(t) \leqslant 8e\delta\omega(2\operatorname{Re}\zeta) \leqslant 8e\delta K\big(2\omega(\operatorname{Re}\zeta)+1\big).$$

Следовательно,

$$\omega(\operatorname{Re}\xi) \leqslant \omega(4\operatorname{Re}\zeta) \leqslant 4K^2\omega(\operatorname{Re}\zeta) + 2K^2 + K,$$

так что из (17) имеем, что

$$|\mu(\xi)| \leqslant C_2 e^{4K(\gamma K + 4e\delta l)\omega(\operatorname{Re}\zeta)}, \tag{22}$$

где $C_2 := Ce^{\gamma(2K^2+K)+8e\delta Kl}$.

Подставляя (21) и (22) в (20), приходим к окончательной оценке для $|\mu(\zeta)|$ снизу

$$|\mu(\zeta)| \geqslant C_3 e^{-2K((H+1)\varepsilon_1 + 2\gamma KH + 8e\delta lH)\omega(\operatorname{Re}\zeta)},$$

где $C_3 := C_1^{H+1}C_2^{-H}$. Поскольку

$$2K(H+1)\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 4\gamma K^2 H < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 16\,e\delta KlH < \frac{\varepsilon}{4},$$

получаем, что

$$|\mu(\zeta)| \geqslant C_3 e^{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)},$$

что и требовалось.

II. $|y| > \delta\omega(x)$. В этом случае нам придется применять лемму об оценке снизу минимума модуля аналитической функции дважды. Связано это с тем, что в первый раз окружность получается слишком большого радиуса (из-за большого $|y|$), так что для точек ζ этой окружности $|\operatorname{Re}\zeta|$ и $|\operatorname{Re} z|$ могут сильно отличаться. Поскольку это недопустимо в случае пространств нормального типа, приходится применять лемму второй раз и строить другую окружность.

Заметим, что в данном случае

$$r \leqslant |y| + \delta\omega(x) \leqslant 2|y|. \tag{23}$$

Возьмем какое-нибудь β с $0 < \beta \leqslant \frac{1}{8}$. По лемме 5 для функции μ, чисел r, $R = (1+\beta)r$ и точки t найдем ρ, $r < \rho < (1+\beta)r$, такое, что для всех $Z \in \mathbb{C}$ с $|Z - t| = \rho$ выполняется неравенство

$$|\mu(Z)| \geqslant |\mu(t)|^{H_1+1}\left(\max_{|\xi - t| = 2e(1+\beta)r} |\mu(\xi)|\right)^{-H_1}, \tag{24}$$

где $H_1 = 3 + \ln\frac{24(1+\beta)}{\beta}$.

На окружности $|Z - t| = \rho$ возьмем точку w такую, что $\arg(w - t) = \arg(z - t)$. Для нее, в частности, выполняется (24). Кроме того,

$$|y| < |\operatorname{Im} w| < (1+\beta)|y|, \quad |\operatorname{Re} w| \leqslant |x| \tag{25}$$

(последнее неравенство следует из $|x| \leqslant |t|$ и элементарных геометрических соображений). Применив лемму 5 к функции μ, числам $r_1 = \beta r$, $R_1 = 2r_1$ и точке w, найдем ρ_1, $r_1 < \rho_1 < 2r_1$, такое, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - w| = \rho_1$ имеет место неравенство

$$|\mu(\zeta)| \geqslant |\mu(w)|^{H+1}\left(\max_{|\xi - w| = 4er_1} |\mu(\xi)|\right)^{-H}.$$

Подставляя сюда оценку (24) с $Z = w$, имеем для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - w| = \rho_1$:

$$|\mu(\zeta)| \geqslant |\mu(t)|^{(H+1)(H_1+1)} \cdot A_1^{-H_1(H+1)} \cdot A_2^{-H}, \tag{26}$$

где

$$A_1 := \max_{|\xi - t| = 2e(1+\beta)r} |\mu(\xi)|, \quad A_2 := \max_{|\xi - w| = 4er_1} |\mu(\xi)|.$$

Покажем, что окружность $C_z = \{\zeta : |\zeta - w| = \rho_1\}$ является искомой в рассматриваемом случае. Во-первых,

$$|z - w| = \rho - r < \beta r = r_1 < \rho_1,$$

поэтому z лежит внутри C_z. Во-вторых, из-за (23) и выбора β при всех $\zeta \in C_z$

$$|\zeta - z| \leqslant |\zeta - w| + |w - z| < \rho_1 + r_1 < 3r_1 = 3\beta r \leqslant 6\beta|y| < |y|,$$

так что оба первых неравенства в $(v)(b)$ выполняются. Остается получить из (26) третье неравенство в $(v)(b)$.

Сначала оценим $|\mu(t)|$ снизу. Так как в силу (18), (1) и выбора δ

$$|t| \leqslant |x| + |t - x| \leqslant |x| + \delta\omega(x) \leqslant (1 + A\delta)|x| \leqslant 2|x|,$$

то с учетом (3) в рассматриваемом случае

$$\omega(t) \leqslant \omega(2x) \leqslant 2K\omega(x) + K \leqslant \frac{2K}{\delta}\,|y| + K.$$

С другой стороны, если $\zeta \in C_z$, то, использовав (23) и выбор β, получим

$$|\operatorname{Im}\zeta| \geqslant |\operatorname{Im} w| - \rho_1 \geqslant |y| - 2r_1 = |y| - 2\beta r \geqslant |y| - 4\beta|y| \geqslant \frac{|y|}{2}.$$

Следовательно,

$$\omega(t) \leqslant \frac{4K}{\delta}\,|\operatorname{Im}\zeta| + K.$$

Отсюда и из (18) заключаем, что

$$|\mu(t)| \geqslant C_4 e^{-\frac{4K\varepsilon_1}{\delta}|\operatorname{Im}\zeta|}, \tag{27}$$

где $C_4 = C_0 e^{-\varepsilon_1 K}$.

Теперь оценим $|\mu(\xi)|$ при $|\xi - t| = 2e(1+\beta)r$. Использовав установленные выше неравенства $|t| \leqslant 2|x|$, $r \leqslant 2|y|$ и $|y| \leqslant 2|\operatorname{Im}\zeta|$, получим, что

$$|\operatorname{Re}\xi| \leqslant |t| + 2e(1+\beta)r \leqslant 2|x| + 4e(1+\beta)|y| \leqslant 2|x| + 8e|y|, \tag{28}$$

$$|\operatorname{Im}\xi| \leqslant 2e(1+\beta)r \leqslant 8e|y| \leqslant 16e|\operatorname{Im}\zeta|. \tag{29}$$

Пусть константа K_1 такова, что

$$\omega(2s + 8e\eta) \leqslant K_1\big(\omega(s) + \omega(\eta) + 1\big) \quad (s, \eta \geqslant 0).$$

Существование K_1 следует из (3). Тогда в силу (28) и (1)

$$\omega(\operatorname{Re}\xi) \leqslant K_1\big(\omega(x) + \omega(y) + 1\big) \leqslant K_1\left(\frac{1}{\delta}\,|y| + A|y| + 1\right) \leqslant 2K_1\left(\frac{1}{\delta} + A\right)|\operatorname{Im}\zeta| + K_1.$$

Подставив эту оценку и (29) в (17), будем иметь, что

$$|\mu(\xi)| \leqslant Ce^{\gamma\omega(\operatorname{Re}\xi)+l|\operatorname{Im}\xi|} \leqslant C_5 e^{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+16el)|\operatorname{Im}\zeta|},$$

где $C_5 := Ce^{K_1}$. Поэтому

$$A_1 \leqslant C_5 e^{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+16el)|\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{30}$$

Наконец, рассмотрим $|\mu(\xi)|$, если $|\xi - w| = 4er_1 = 4e\beta r$. Используя оценки (25), имеем:

$$|\operatorname{Re}\xi| \leqslant |\operatorname{Re}w| + 4e\beta r \leqslant |x| + 4e\beta r \leqslant |x| + e|y|,$$
$$|\operatorname{Im}\xi| \leqslant |\operatorname{Im}w| + 4e\beta r \leqslant (1+\beta)|y| + 8e\beta|y| \leqslant 4|y| \leqslant 8|\operatorname{Im}\zeta|.$$

Отсюда, учитывая выбор K_1, аналогично предыдущему получаем, что

$$\omega(\operatorname{Re}\xi) \leqslant 2K_1\left(\frac{1}{\delta}+A\right)|\operatorname{Im}\zeta| + K_1,$$

и (17) дает, что

$$|\mu(\xi)| \leqslant Ce^{\gamma\omega(\operatorname{Re}\xi)+l|\operatorname{Im}\xi|} \leqslant C_5 e^{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+8l)|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Значит,

$$A_2 \leqslant C_5 e^{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+8l)|\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{31}$$

Подставляя (30), (31) и (27) в (26), окончательно получаем, что

$$|\mu(\zeta)| \geqslant C_6 e^{-L|\operatorname{Im}\zeta|}, \tag{32}$$

где

$$C_6 = C_4^{(H+1)(H_1+1)} \cdot C_5^{-H_1H-H-H_1}$$

и

$$L = \frac{4K\varepsilon_1}{\delta}(H+1)(H_1+1) + 2\gamma K_1\left(\frac{1}{\delta}+A\right)(H_1H+H+H_1) + 16elH_1(H+1) + 8lH.$$

Заметим, что C_6 и L зависят от ε и δ, но не зависят от z.

Итак, мы доказали выполнение условия (v) для $z = x+iy$ с $|x| \geqslant r_0$. Остается проверить его для достаточно больших по модулю z с $|x| < r_0$.

Пусть $z = x+iy$, $|x| < r_0$, $|z| \geqslant 5r_0$. Тогда $|y| \geqslant 4r_0$ и

$$\delta\omega(x) \leqslant \delta A|x| \leqslant \delta_\varepsilon A|x| \leqslant \frac{1}{8e}r_0 < |y|,$$

так что для данной точки z мы должны строить такую окружность, как в $(v)(b)$. Положим $z_0 := r_0 \operatorname{sgn} x + iy$. Для нее также

$$\delta\omega(\operatorname{Re}z_0) \leqslant \frac{1}{8e}r_0 < |y| = |\operatorname{Im}z_0|,$$

причем $|\operatorname{Re}z_0| = r_0$. Следовательно, для z_0 применимы все рассуждения из пункта II. На первом шаге, как и выше, по $x_0 := r_0 \operatorname{sgn} x$ находится точка t, а по ней, в свою очередь, — точка w. Второй шаг мы несколько модифицируем, применив лемму 5 к функции μ, числам $r_2 := r_0 + \beta r$, $R_2 = 2r_2$ и точке w (здесь $r = |z_0 - t|$). В результате получим число ρ_2, $r_2 < \rho_2 < 2r_2$, такое, что при всех ζ с $|\zeta - w| = \rho_2$

$$|\mu(\zeta)| \geqslant |\mu(w)|^{H+1} \left(\max_{|\xi - w| = 4er_2} |\mu(\xi)| \right)^{-H}.$$

С учетом (24) тогда имеем, что для любых ζ с $|\zeta - w| = \rho_2$ справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geqslant |\mu(t)|^{(H+1)(H_1+1)} A_1^{-H_1(H+1)} A_3^{-H},$$

где A_1 — то же, что и выше, а $A_3 := \max_{|\xi - w| = 4er_2} |\mu(\xi)|$.

Покажем, что окружность $C_z := \{\zeta : |\zeta - w| = \rho_2\}$ является искомой для точки z. Во-первых,

$$|z - w| \leqslant |z - z_0| + |z_0 - w| \leqslant r_0 + \beta r = r_2 < \rho_2,$$

так что z лежит внутри C_z. Далее, как и выше в пункте II, учитывая (23) и оценку $r_0 \leqslant |y|/4$, для $\zeta \in C_z$ имеем:

$$|\zeta - z| \leqslant |\zeta - z_0| + |z_0 - z| \leqslant \rho_2 + r_0 < 2r_2 + r_0 = 3r_0 + 2\beta r < \frac{3}{4}|y| + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{|y|}{2} < |y|.$$

Значит, оба первых неравенства в $(v)(b)$ выполнены. Проверка аналога неравенства (32), т. е. третьего неравенства в $(v)(b)$, проводится так же, как в заключительной части пункта II, и даже с некоторыми упрощениями, поскольку в данном случае $|x| < r_0$ и за ростом $|x|$ и $\omega(x)$ следить не приходится.

Лемма полностью доказана. $\rhd$

Лемма 8. $(v) \Rightarrow (i)$.

$\lhd$ Пусть выполнено утверждение (v) теоремы 2 и пусть $f \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, а $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$. Покажем, что тогда $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Для функции f найдем $q \in (0,1)$, $l > 0$ и $C_f > 0$ такие, что

$$|f(z)| \leqslant C_f e^{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Далее, возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $(q+\varepsilon)(1+\varepsilon) < 1$. Для него в силу (v) имеется соответствующее δ_ε. Кроме того, из (4) вытекает, что существует $\delta > 0$, $\delta < \min\left\{\delta_\varepsilon, \frac{1}{6l}\big(1 - (q+\varepsilon)(1+\varepsilon)\big)\right\}$, для которого

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\omega\big((1 + 6A\delta)t\big)}{\omega(t)} < 1 + \varepsilon,$$

и, значит, при некотором $M > 0$ имеем $\omega\big((1+6A\delta)t\big) \leqslant (1+\varepsilon)\omega(t) + M$, $t \geqslant 0$. Для данного δ, используя (v), находим соответствующие r_0, L и c.

Пусть теперь $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant r_0$, а C_z — окружность, обладающая свойствами $(v)(a)$ или $(v)(b)$. Оценим $\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right|$ для $\zeta \in C_z$.

I. Если $|y| \leqslant \delta\omega(x)$, то при всех $\zeta \in C_z$ получаем

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant \frac{C_f}{c} e^{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\zeta) + l|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Поскольку при этом $|\operatorname{Re}\zeta - x| \leqslant 6\delta\omega(x) \leqslant 6A\delta|x|$, то $|\operatorname{Re}\zeta| \leqslant (1+6A\delta)|x|$. Поэтому

$$(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\zeta) \leqslant (q+\varepsilon)\omega\big((1+6A\delta)x\big) \leqslant (q+\varepsilon)(1+\varepsilon)\omega(x) + M.$$

Кроме того, $|\operatorname{Im}\zeta| \leqslant 6\delta\omega(x)$. Следовательно,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant C_1 e^{q_1\omega(x)},$$

где $C_1 := \frac{C_f}{c}\, e^M$, а $q_1 = (q+\varepsilon)(1+\varepsilon) + 6\delta l < 1$.

II. Если же $|y| > \delta\omega(x)$, то из $(v)(b)$ для любого $\zeta \in C_z$ имеем

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant \frac{C_f}{c}\, e^{q\omega(\operatorname{Re}\zeta)+(l+L)|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

При этом, во-первых, $|\operatorname{Re}\zeta| \leqslant |x| + |y|$, так что с учетом (1) и (3)

$$q\omega(\operatorname{Re}\zeta) \leqslant q\omega(|x|+|y|) \leqslant qK\big(\omega(x)+\omega(y)+1\big) \leqslant qK\left(\frac{1}{\delta}\,|y| + A|y| + 1\right)$$
$$\leqslant qK\left(\frac{1}{\delta}+A\right)|y| + K.$$

Во-вторых, $|\operatorname{Im}\zeta| \leqslant 2|y|$. Отсюда имеем, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant \widetilde{C_1} e^{l_1|y|},$$

где $\widetilde{C_1} := \frac{C_f}{c}\, e^K$, а $l_1 := qK\left(\frac{1}{\delta}+A\right) + l + L$.

Объединяя случаи I и II, окончательно получаем, что для всех $\zeta \in C_z$

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \leqslant C e^{q_1\omega(x)+l_1|y|},$$

где $C = C_1 + \widetilde{C_1}$. Тогда по принципу максимума аналитических функций

$$\left|\frac{f(z)}{\mu(z)}\right| \leqslant C e^{q_1\omega(\operatorname{Re}z)+l_1|\operatorname{Im}z|}.$$

При этом C не зависит от z. Значит, $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\triangleright$

4. Разрешимость уравнений свертки

Доказанная только что теорема 2 имеет естественные приложения в вопросе о разрешимости уравнений свертки в классах ультрадифференцируемых функций нормального типа.

Пусть ω — весовая функция, $\varphi^*_\omega(y) := \sup\{xy - \varphi_\omega(x) :\ x \geqslant 0\}$, $y \geqslant 0$, — сопряженная по Юнгу к функции $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$. Для положительных чисел s и l определим следующее пространство бесконечно дифференцируемых функций

$$\mathscr{E}_{\omega,s,l}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ :\ |f|_{\omega,s,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{s\varphi^*_\omega(j/s)}} < \infty \right\}.$$

Пространством ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа называется пространство

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}) := \bigcap_{s\in(0,1)}\ \bigcap_{l\in(0,\infty)} \mathscr{E}_{\omega,s,l}(\mathbb{R}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_{\omega,q_n,n}(\mathbb{R}),$$

где, как и выше, $q_n \uparrow 1$. Данный класс будет неквазианалитическим, если вес ω удовлетворяет условию (β), и квазианалитическим в противном случае. Пространство $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ наделяется естественной топологией пространства Фреше, задаваемой набором преднорм $\big(|\cdot|_{\omega,q_n,n}\big)_{n=1}^{\infty}$. Как известно [8, теорема 1], преобразование Фурье — Лапласа функционалов

$$F : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)'_\beta$, сильным сопряженным с $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, и $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Пусть теперь μ — произвольный нетривиальный мультипликатор пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно и инъективно в пространстве $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, так что $F^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ F$ — линейное непрерывное инъективное отображение в $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)'_\beta$. Сопряженное с ним отображение T_μ, действующее в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, будем, следуя А. Мартино [20], называть оператором свертки. В соответствии с общим результатом теории двойственности [21, теорема 8.6.13 и соотношение (c) на с. 705], оператор T_μ сюръективен тогда и только тогда, когда образ отображения $F^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ F$ замкнут в $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)'_\beta$. Последнее, очевидно, равносильно тому, что образ оператора Λ_μ замкнут в $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Таким образом, с учетом теоремы 2 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть ω — весовая функция, а μ — произвольный нетривиальный мультипликатор пространства $H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Для того чтобы уравнение свертки $T_\mu f = g$ было разрешимо в классе $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы для μ выполнялось одно из эквивалентных условий $(i) - (v)$.*

Литература

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division // Amer. J. Math.—1960.—Vol. 82.—P. 522–588.
2. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J.—1987.—Vol. 36, № 4.—P. 729–756.
3. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—Vol. 17.—P. 206–237.
4. *Momm S.* Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math.—1992.—Vol. 58.—P. 47–55.
5. *Коробейник Ю. Ф.* О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сб.—1968.—Т. 75, № 2.—С. 225–234.
6. *Епифанов О. В.* Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях // Мат. заметки.—1974.—Т. 15, № 5.—С. 787–796.
7. *Ткаченко В. А.* Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1977.—Т. 41, № 2.—С. 378–392.
8. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
9. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Results Math.—2003.—Vol. 44.—P. 195–213.
10. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
11. *Абанин А. В.* О мультипликаторах пространства целых функций, задаваемого нерадиальным двучленным весом // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 4.—С. 10–16.
12. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math.—1989.—Т. 15, № 2.—С. 105–114.
13. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки.—1986.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
14. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.

15. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97—131.
16. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика.—1957.—Т. 1, № 1.—С. 60–77.
17. *Райков Д. А.* О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Тр. семинара по функц. анализу.—Воронеж, 1957.—Вып. 5.—С. 22–34.
18. *Baernstein A.* Representation of holomorphic functions by boundary integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 160.—P. 27–37.
19. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
20. *Martineau A.* Équation différentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. Franc.—1967.—Vol. 95.—P. 109–154.
21. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1072 с.

Абанин Александр Васильевич,
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ведущий научный сотрудник лаб. теории операторов
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Абанина Дарья Александровна,
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник лаб. компл. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanina@math.rsu.ru

DIVISION THEOREM IN SOME WEIGHTED SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS

Abanin A. V., Abanina D. A.

We consider weighted spaces of entire functions which are dual to the Beurling spaces of ultradifferentiable functions of mean type. We prove a division theorem, which completely characterizes all divisors of these spaces. With the help of this theorem, we obtain a criterion for the solvability of convolution equations in the Beurling classes of mean type.

Key words: multiplication operator, division theorem, ultradifferentiable functions, convolution operator.