Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 3, С. 21–29

УДК **517.983**

ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ СИМВОЛАМИ[1]

А. В. Гиль, В. А. Ногин

Получены необходимые и достаточные условия ограниченности многомерных операторов типа потенциала с ядрами, имеющими особенности на единичной сфере, действующие из H^p в H^q, из BMO в L^∞, из L^1 в H^1 и из BMO в BMO.

Ключевые слова: свертка, осциллирующий символ, BMO, $H^p - H^q$ оценки, мультипликатор, обобщенная функция, оператор типа потенциала.

1. Введение

В работе получены $H^p - H^q$ оценки, $0 < p \leqslant 1$, $p \leqslant q < \infty$, для многомерного оператора свертки

$$\big(S^\beta_{\theta,+}\varphi\big)(x) = \int\limits_{1-\delta\leqslant|y|\leqslant 1} s^\beta_{\theta,+}(y)\,\varphi(x-y)\,dx, \tag{1}$$

где

$$s^\beta_{\theta,+}(y) = \theta(|y|)\,\big(1-|y|^2\big)^{\beta-1}_+, \quad 0<\beta<1, \quad \delta>0, \quad \theta(1)\neq 0.$$

Здесь $\theta(r)$ — гладкая функция, называемая характеристикой оператора K^β_θ.

Для операторов (1) установлены также $BMO - L^\infty$, $L^1 - H^1$ и $BMO - BMO$ оценки.

Заметим, что символ оператора (1) осциллирует на бесконечности, что существенно используется при доказательстве соответствующих теорем. Для получения указанных результатов, в статье развивается новый метод, основанный на получении специальных представлений для символов рассматриваемых операторов в виде суммы некоторых интегралов, содержащих осциллирующую экспоненту, с последующим применением к этим интегралам метода стационарной фазы и результатов A. Miyachi для «модельных» мультипликаторов

$$m^\pm_b(|\xi|) = v\big(|\xi|^2\big)|\xi|^{-b}\,e^{\pm i|\xi|}, \quad b>0, \tag{2}$$

где $v(r)\in C^\infty(0,\infty)$ такова, что $v(r)=0$, если $r\leqslant 1$, $v(r)=1$, если $r\geqslant 2$ и $0\leqslant v(r)\leqslant 1$.

Отметим также, что указанные оценки были установлены ранее только для мультипликаторных операторов (см., например, [1, 2]). Получить их в ситуации, когда оператор изначально задается как оператор свертки, — такая ситуация намного труднее — удалось благодаря описанному выше методу.

Заметим еще, что $L^p - L^q$ оценки для оператора (1), $1 \leqslant p < \infty$, были получены в [3, 4].

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329 а, и Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, госконтракт № 02.740.11.5024.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Обозначения. Всюду ниже используются следующие обозначения:
$(Ff)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{i\xi x}\, dx$ — преобразование Фурье функции f;
$(F^{-1}f)(\xi) := \tilde{f}(\xi) := (2\pi)^{-n}(Ff)(-\xi)$ — обратное преобразование Фурье;
$\mathscr{S}$ — класс Шварца быстро убывающих гладких функций;
$\mathscr{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста.

2.2. Некоторые пространства функций и распределений. Через $H^p = H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leqslant 1$, обозначим множество всех $\mathscr{S}'$-распределений таких, что

$$f^+(x) = \sup_{0<\varepsilon<\infty} \big|(f * \varphi_\varepsilon)(x)\big| \in L^p,$$

где $\varphi \in \mathscr{S}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \neq 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ и $(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \langle f, \varphi_\varepsilon(x - \cdot)\rangle$. Положим $\|f\|_{H^p} = \|f^+\|_{L^p}$ (см. [5; 6, гл. 3–4]).

Так как класс $\mathscr{S}$ не содержится в H^p, то в качестве плотного множества в H^p мы берем $\mathscr{S} \cap H^p$ [2, с. 275].

Через $BMO = BMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех локально интегрируемых функций, для которых

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|\, dx \right\} < \infty,$$

где $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\, dx$ и супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{R}^n$. Заметим, что пространство BMO является сопряженным к H^1 [6, с. 142].

Ниже, при доказательстве теоремы 5 существенно используется неравенство Феффермана [7]: если $f \in H^1$, $g \in BMO$ и $fg \in L^1$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant C\, \|f\|_{H^1} \|g\|_{BMO}. \tag{3}$$

Пусть, далее, каждое из X и Y — одно из пространств H^p, $0 < p \leqslant 1$, L^∞ или BMO. Следуя [2], через $\mathscr{K}(X, Y)$ обозначим пространство всех $k \in \mathscr{S}'$ таких, что

$$\|k\|_{\mathscr{K}(X,Y)} = \sup\big\{\|k * f\|_Y / \|f\|_X : f \in \mathscr{S} \cap X,\ \|f\|_X \neq 0\big\} < \infty.$$

Через $\mathscr{M}(X, Y)$ обозначим множество обобщенных функций $m \in \mathscr{S}'$ таких, что

$$\|m\|_{\mathscr{M}(X,Y)} = \sup\Big\{\|F^{-1}(m\hat{f})\|_Y / \|f\|_X : f \in \mathscr{S} \cap X,\ \|f\|_X \neq 0\Big\} < \infty.$$

Таким образом,

$$\|m\|_{\mathscr{M}(X,Y)} = \|F^{-1}m\|_{\mathscr{K}(X,Y)}. \tag{4}$$

Ниже нам понадобится равенство $\mathscr{K}(L^1, L^q) = L^q$, $1 < q \leqslant \infty$, содержащееся в теореме 3.3 из [2, с. 278].

2.3. О некоторых $H^p - H^q$ мультипликаторах. Нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема 1 [2, с. 284]. *Имеют место соотношения:*
a) $m_b^{\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, H^q)$, $0 < p \leqslant q < \infty \Leftrightarrow 1/p + 1/q \leqslant 1$, $1/p - n/q \leqslant b - (n-1)/2$ *или* $1/p + 1/q \geqslant 1$, $n/p - 1/q \leqslant b + (n-1)/2$;
b) $m_b^{\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^1, H^1) = \mathscr{M}(BMO, BMO) \Leftrightarrow b \geqslant (n-1)/2$;
c) $m_b^{\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(L^1, H^1) = \mathscr{M}(BMO, L^\infty) \Leftrightarrow b > (n-1)/2$.

Теорема 2 [8, с. 163–171]. *Пусть $0 < p \leqslant 2$ и $k = \big[n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})\big] + 1$. Если m ограниченная функция класса $C^k(R^n \setminus \{0\})$ и $|D^\alpha m(\xi)| \leqslant \big(A|\xi|^{-1}\big)^{|\alpha|}$, при $|\alpha| \leqslant k$ и $A \geqslant 1$, то $m \in M(H^p, H^p)$ и $\|m\|_{M(H^p,H^p)} \leqslant C\, A^{n(1/p-1/2)}$.*

2.4. Равномерное асимптотическое разложение функции Бесселя $J_\nu(z)$. Пусть $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Представляя $J_\nu(z)$ в виде линейной комбинации функции Ганкеля $H^{(1)}_{\pm\nu}(z)$ и $H^{(2)}_{\pm\nu}(z)$ (где берется $+\nu$, если $\nu > -1/2$ и $-\nu$ в противном случае) и применяя результаты [9, с. 220], получаем равенство

$$J_\nu(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-1/2} \left[e^{-iz}\left(\sum_{l=0}^{N} C^{(\nu)}_{l,-} z^{-l} + R^{(\nu)}_{N,-}(z)\right) + e^{iz}\left(\sum_{l=0}^{N} C^{(\nu)}_{l,+} z^{-l} + R^{(\nu)}_{N,+}(z)\right)\right], \quad (5)$$

где $C^{(\nu)}_{0,\pm} = \frac{1}{2}\, e^{\mp(i\pi/4)(2\nu+1)}$,

$$R^{(\nu)}_{N,\pm}(z) = \frac{B^\pm_N}{z^{N+1}} \cdot Q^{(\nu)}_{N,\pm}(z), \quad (6)$$

$$Q^{(\nu)}_{N,\pm}(z) = \int_0^1 (1-t)^N\, dt \int_0^{\infty\cdot\exp(i\alpha)} e^{-u} u^{\nu+N+1/2} \left(1 - \frac{u}{t} \pm 2iz\right)^{\nu-N-\frac{3}{2}} du. \quad (7)$$

2.5. Асимптотическое разложение некоторых интегралов, содержащих осциллирующую экспоненту. Анализ доказательства леммы Эрдейи, приведенного в [10], показывает, что справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $\beta > 0$, $f(x) \in C^\infty([0, a])$ и $f^{(j)}(a) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Тогда*

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x)\, e^{\pm i\lambda x}\, dx = a^\pm_\beta \lambda^{-\beta} + W^{\pm,\beta}_1(\lambda), \quad \lambda \geqslant 1, \quad a^\pm_\beta = f(0)\,\Gamma(\beta)(\pm i)^\beta; \quad (8)$$

$$\left|\left(W^{\pm,\beta}_1(\lambda)\right)^{(j)}\right| \leqslant C^{\pm,j}/\lambda^{1+\beta+j}, \quad \lambda > 1, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (9)$$

постоянные $C^{\pm,j}$ не зависят от λ.

3. $H^p - H^q$ оценки для оператора $S^\beta_{\theta,+}$

На $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$-плоскости рассмотрим множество:

$$\mathscr{L}(\beta, n) = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) :\ 0 < p \leqslant 1,\ p \leqslant q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1,\ \frac{n}{p} - \frac{1}{q} \leqslant \beta + (n-1) \right\}.$$

Через $\mathscr{H}(K)$ обозначим множество всех пар $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, для которых $\|K\|_{\mathscr{K}(H^p,H^q)} < \infty$.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 3. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(\beta, n) \subset H\big(S^\beta_{\theta,+}\big). \quad (10)$$

$\lhd$ Представим оператор $S^\beta_{\theta,+}$ в виде

$$\big(S^\beta_{\theta,+}\varphi\big)(x) = \big(S^{\beta,1}_{\theta,+}\varphi\big)(x) + \big(S^{\beta,2}_{\theta,+}\varphi\big)(x), \quad (11)$$

где

$$\big(S^{\beta,1}_{\theta,+}\varphi\big)(x) = \int\limits_{1-\delta\leqslant|y|\leqslant 1} \omega(|y|)\, s^{\beta}_{\theta,+}(y)\, \varphi(x-y)\, dx,$$

$$\big(S^{\beta,2}_{\theta,+}\varphi\big)(x) = \int\limits_{1-\delta\leqslant|y|\leqslant 1} \big(1-\omega(|y|)\big)\, s^{\beta}_{\theta,+}(y)\, \varphi(x-y)\, dx,$$

функция $\omega(r) \in C^{\infty}(0,\infty)$ такова, что $0 \leqslant \omega(r) \leqslant 1$, $\omega(r) = 0$, если $r \notin (1-\delta, 1+\delta)$ и $\omega(r) = 1$, если $r \in [1-\delta/2, 1+\delta/2]$, $0 < \delta < 1$.

Вначале докажем вложение

$$\mathscr{L}(\beta, n) \subset \mathscr{H}\big(S^{\beta,1}_{\theta,+}\big). \tag{12}$$

Изложим схему доказательства вложения (12). Допустим мы доказали, что

$$\omega(|y|)\, s^{\beta}_{\theta,+}(|y|) \in \mathscr{K}(H^p, H^q), \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}(\beta, n).$$

Заметим, что функция $m_{\beta,\theta}(\xi) = (\widehat{\omega \cdot s^{\beta}_{\theta,+}})(\xi)$ является мультипликатором в $\mathscr{S}$. (Это видно из равенства (15).) Тогда оператор (1) определен на всем $\mathscr{S}'$ (поскольку $\omega(|y|)\, s^{\beta}_{\theta,+}(|y|)$ является свертывателем в $\mathscr{S}$) и, следовательно, на всем H^p. Как показано в [2] (см. замечание 2.3.), при выполнении указанных условий неравенство

$$\big\|S^{\beta,1}_{\theta,+}\varphi\big\|_{H^q} \leqslant \big\|\omega \cdot s^{\beta}_{\theta,+}\big\|_{\mathscr{K}(H^p,H^q)} \|\varphi\|_{H^p}, \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}(\beta, n), \tag{13}$$

справедливо для всех $\varphi \in H^p$. Из (13) вытекает (12).

Так как $\big\|\omega \cdot s^{\beta}_{\theta,+}\big\|_{\mathscr{K}(H^p,H^q)} = \big\|m_{\beta,\theta}\big\|_{\mathscr{M}(H^p,H^q)}$, то (13) (а вместе с ним и (12)) будет следовать из соотношения

$$m_{\beta,\theta}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, H^q), \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}(\beta, n). \tag{14}$$

Докажем (14). Запишем $m_{\beta,\theta}(\xi)$ в виде

$$m_{\beta,\theta}(\xi) = \int\limits_{1-\delta}^{1} \rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta-1}\theta(\rho)\, \omega(\rho)\, d\rho \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}\, d\sigma. \tag{15}$$

Имеем $m_{\beta,\theta}(\xi) = \big(1 - v(|\xi|^2)\big) m_{\beta,\theta}(\xi) + v(|\xi|^2)\, m_{\beta,\theta}(\xi) \equiv m^0_{\beta,\theta}(\xi) + m^{\infty}_{\beta,\theta}(\xi)$. Заметим, что

$$m^0_{\beta,\theta}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, H^q), \quad 0 < p \leqslant 1, \quad 0 < p \leqslant q < \infty. \tag{16}$$

Действительно, $m^0_{\beta,\theta}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, H^p)$, $0 < p \leqslant 1$, по теореме 2. Так как $m^0_{\beta,\theta}(\xi) \in \mathscr{S}$, то $m^0_{\beta,\theta}(\xi) \in \mathscr{M}(L^1, L^q)$, $1 < q < \infty$. Тогда, в силу вложения $H^1 \subset L^1$ [6, с. 112], $m^0_{\beta,\theta}(\xi) \in \mathscr{M}(H^1, L^q)$, $1 < q < \infty$. Пользуясь соображениями выпуклости, получаем (16).

Рассмотрим $m^{\infty}_{\beta,\theta}(\xi)$. Применив формулу:

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{i(x\cdot\sigma)}\, d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(|x|), \tag{17}$$

и формулу (5) с $N = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, получаем

$$m^{\infty}_{\beta,\theta}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} \Big(h_1^{\beta,k,-}(|\xi|) + h_1^{\beta,k,+}(|\xi|) \Big) + R_1^{\beta,N,-}(|\xi|) + R_1^{\beta,N,+}(|\xi|),$$

где

$$h_1^{\beta,k,\pm}(|\xi|) = \frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \int\limits_{1-\delta}^{1} (1-\rho)^{\beta-1} g_k(\rho)\, e^{\pm i\rho|\xi|}\, d\rho, \quad 0 \leqslant k \leqslant N, \tag{18}$$

$$g_k(\rho) = \gamma_{k,\pm}\, \rho^{\frac{n-1}{2}-k} (1+\rho)^{\beta-1} \theta(\rho)\, \omega(\rho), \quad \gamma_{0,\pm} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{\mp \frac{i\pi}{4}(n-1)},$$

$$R_1^{\beta,N,\pm}(|\xi|) = \frac{\gamma_{N+1,\pm}}{\gamma_{0,\pm}} \cdot \frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_{1-\delta}^{1} (1-\rho)^{\beta-1} g_0(\rho)\, e^{\pm i\rho|\xi|} R^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}_{N,\pm}(\rho|\xi|)\, d\rho. \tag{19}$$

Рассмотрим мультипликатор (18). После замены $1-\rho=\tau$ получаем

$$h_1^{\beta,k,\pm}(|\xi|) = \frac{e^{\pm i|\xi|} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \int\limits_{0}^{\delta} \tau^{\beta-1} g_k(1-\tau)\, e^{\mp i|\xi|\tau}\, d\tau. \tag{20}$$

Пусть функция $\tilde{v}(|\xi|^2)$ такова, что $\tilde{v}(r) \in C^{\infty}(0,\infty)$, $\tilde{v}(r) = 0$, если $r \leqslant 1$, $\tilde{v}(r) = 1$, если $r \geqslant 2$ и $0 \leqslant \tilde{v}(r) \leqslant 1$. Тогда $v(r^2)\,\tilde{v}(r^2) = v(r^2)$. Преобразуем мультипликатор (20), используя лемму 1. С учетом (8), будем иметь

$$h_1^{\beta,k,\pm}(|\xi|) = v(|\xi|^2)\, e^{\pm i|\xi|} \cdot |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k-\beta} \cdot \tilde{v}\big(|\xi|^2\big) \Big(a_\beta^{k,\mp} + |\xi|^{\beta}\, W_1^{\mp,\beta}(|\xi|) \Big),$$

где $a_\beta^{k,\mp} = \gamma_{k,\pm}\theta(1)\,(\mp i)^{\beta}\,\Gamma(\beta)$ и для $W_1^{\mp,\beta}(|\xi|)$ справедливо неравенство (9).

Заметим, что

$$v(|\xi|^2)\, e^{\pm i|\xi|} \cdot |\xi|^{\frac{1-n}{2}-\beta} \in \mathscr{M}(H^p, H^q)$$

по теореме 1 (a), если $(1/p, 1/q) \in \mathscr{L}(\beta, n)$. Кроме того,

$$\tilde{v}\big(|\xi|^2\big) \Big(a_\beta^{k,\mp} + |\xi|^{\beta}\, W_1^{\mp,\beta}(|\xi|) \Big) \in \mathscr{M}(H^p, H^p), \quad 0 < p \leqslant 1,$$

по теореме 2 и является мультипликатором в $\mathscr{S}$. Тогда

$$h_1^{\beta,0,\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, H^q), \quad \text{если} \ \ (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}(\beta, n).$$

Аналогично доказывается, что $h_1^{\beta,k,\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, H^q)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, если $(1/p, 1/q) \in \mathscr{L}(\beta+1, n)$.

Рассмотрим (19). После замены $1-\rho=\tau$ и с учетом равенства (6), получаем

$$R_1^{\beta,N,\pm}(|\xi|) = \frac{B_N^{\pm}\, e^{\pm i|\xi|}\, v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+N+1}} \int\limits_{0}^{\delta} \tau^{\beta-1} g_{N+1}(1-\tau)\, e^{\mp i|\xi|\tau} Q^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}_{N,\pm}\big((1-\tau)|\xi|\big)\, d\tau.$$

Применяя лемму 1, будем иметь

$$R_1^{\beta,N,\pm}(|\xi|) = B_N^{\pm}\, v(|\xi|^2)\, e^{\pm i|\xi|} \cdot |\xi|^{\frac{1-n}{2}-N-1-\beta} \cdot \tilde{v}\big(|\xi|^2\big) \Big(a_\beta^{N+1,\mp}(|\xi|) + |\xi|^{\beta} W_1^{\mp,\beta}(|\xi|) \Big),$$

где $a_\beta^{N+1,\mp}(|\xi|) = \gamma_{N+1,\pm}\,\theta(1)\,(\mp i)^\beta\,\Gamma(\beta)\,Q_{N,\pm}^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(|\xi|)$, а $Q_{N,\pm}^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(z)$ имеет вид (7). Тогда

$$B_N^\pm v(|\xi|^2)\,e^{\pm i|\xi|}\cdot|\xi|^{-\frac{n+1}{2}-N-\beta} \in \mathscr{M}(H^p,H^q),$$

если $(1/p,1/q)\in\mathscr{L}(\beta+1,n)$, по теореме 1 (a). Применяя теорему 2, имеем

$$\tilde v\big(|\xi|^2\big)\Big(a_\beta^{N+1,\mp}(|\xi|) + |\xi|^\beta W_1^{\mp,\beta}(|\xi|)\Big) \in \mathscr{M}(H^p,H^p),$$

$0<p\leqslant 1$. Кроме того, эта функция является мультипликатором в $\mathscr{S}$. Тогда $R_1^{\beta,N,\pm}(|\xi|)\in\mathscr{M}(H^p,H^q)$, если $(1/p,1/q)\in\mathscr{L}(\beta+1,n)$.

Резюмируя сказанное, получаем, что

$$m^\infty_{\beta,\theta}(\xi)\in\mathscr{M}(H^p,H^q),\quad (1/p,1/q)\in\mathscr{L}(\beta,n),$$

откуда, с учетом (16), следует (14).

Докажем вложение

$$\mathscr{L}(\beta,n)\subset\mathscr{H}(S^{\beta,2}_{\theta,+}). \tag{21}$$

Обозначим через $m^\beta_{\theta,+}(y)$ ядро оператора $S^{\beta,2}_{\theta,+}$. Очевидно, что

$$m^\beta_{\theta,+}(y)\equiv\big(1-\omega(|y|)\big)\,s^\beta_{\theta,+}(y)\in C_0^\infty.$$

Тогда,

$$\widehat{m^\beta_{\theta,+}}(\xi)\in\mathscr{M}(H^p,H^p),\quad 0<p\leqslant 1. \tag{22}$$

Покажем далее, что

$$\widehat{m^\beta_{\theta,+}}(\xi)\in\mathscr{M}(H^1,L^q),\quad 1<q<\infty. \tag{23}$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем $m^\beta_{\theta,+}(y)\in\mathscr{K}(L^{q'},L^\infty)$, $1<q'<\infty$. Тогда, в силу вложения $L^\infty\subset BMO$ и, с учетом равенства $\mathscr{K}(L^{q'},BMO)=\mathscr{K}(H^1,L^q)$, $1/q'+1/q=1$, получаем (23). Из (22) и (23), используя соображения выпуклости, получаем (21). Из (12) и (21) следует (10). $\rhd$

Замечание. Используя идею доказательства точности H^p-H^q оценок $(0<p\leqslant 1)$ для мультипликаторного оператора с символом (2), применявшуюся в [2], можно показать, что знак вложения в (10) можно заменить знаком равенства.

Из доказанной выше ограниченности оператора (1) в пространстве H^1 вытекает

Теорема 4. *Оператор* (1) *ограничен в пространстве BMO.*

4. L^1-H^1 и $BMO-L^\infty$ оценки для оператора (1)

Представляет интерес вопрос об ограниченности оператора (1) из X в Y в случае, когда $Y\subset X$. Здесь, мы получим оценки для этого оператора из L^1 в H^1 и из BMO в L^∞.

Теорема 5. *Пусть*

$$\int\limits_{1-\delta}^{1}\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta-1}\,\theta(\rho)\,d\rho=0. \tag{24}$$

Тогда оператор $S^\beta_{\theta,+}$ ограничен из L^1 в H^1 и из BMO в L^∞.

$\triangleleft$ Докажем, что
$$\widehat{s^{\beta}_{\theta,+}}(\xi) \in \mathscr{M}(L^1, H^1) = \mathscr{M}(BMO, L^\infty). \tag{25}$$
Тогда, с учетом (4) и замечания 2.3 из [2], получаем
$$\big\|S^{\beta}_{\theta,+}\varphi\big\|_{H^1} \leqslant \|s^{\beta}_{\theta,+}\|_{\mathscr{K}(L^1,H^1)}\|\varphi\|_{L^1},$$
т. е. оператор $S^{\beta}_{\theta,+}$ ограничен из L^1 в H^1 и, в силу (25), — из BMO в L^∞.

Преобразование Фурье ядра $s^{\beta}_{\theta,+}$:
$$\widehat{s^{\beta}_{\theta,+}}(\xi) = \int\limits_{1-\delta}^{1} \rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta-1}\theta(\rho)\,d\rho \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}d\sigma,$$
запишем в виде $\widehat{s^{\beta}_{\theta,+}}(\xi) = \big(1 - v(|\xi|^2)\big)\,\widehat{s^{\beta}_{\theta,+}}(\xi) + v(|\xi|^2)\,\widehat{s^{\beta}_{\theta,+}}(\xi) \equiv \widehat{s^{\beta,0}_{\theta,+}}(\xi) + \widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,+}}(\xi)$, где функция $v(r)$ описана во введении.

Покажем, что
$$\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,+}}(\xi) \in \mathscr{M}(L^1, H^1). \tag{26}$$
Имеем $\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,+}}(\xi) = \widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,1}}(\xi) + \widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,2}}(\xi)$, $\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,1}}(\xi) = v(|\xi|^2)\,m_{\beta,\theta}(\xi)$, где $m_{\beta,\theta}(\xi)$ — функция (15),
$$\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,2}}(\xi) = v(|\xi|^2)\int\limits_{1-\delta}^{1} \rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta-1}(1-\omega(\rho))\,\theta(\rho)\,d\rho \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}\,d\sigma;$$
функция $\omega(r)$ описана в § 3.

Повторяя выкладки, приведенные в § 3 для $\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,1}}(\xi)$ и применяя теорему 1 (c), получаем
$$\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,1}}(\xi) \in \mathscr{M}(L^1, H^1). \tag{27}$$
Применив далее к $\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,2}}(\xi)$ формулу (17), а затем формулу (5) с $N = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, будем иметь
$$\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,2}}(\xi) = \sum_{k=0}^{N}\big(h^-_{\beta,k}(|\xi|) + h^+_{\beta,k}(|\xi|)\big) + R^-_{\beta,N}(|\xi|) + R^+_{\beta,N}(|\xi|),$$
где
$$h^{\pm}_{\beta,k}(|\xi|) = \frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}\int\limits_{1-\delta}^{1-\delta/2} g_k(\rho)\,e^{\pm i\rho|\xi|}\,d\rho, \quad 0 \leqslant k \leqslant N, \tag{28}$$
$$g_k(\rho) = \gamma_{k,\pm}\rho^{\frac{n-1}{2}-k}(1-\rho^2)^{\beta-1}(1-\omega(\rho))\,\theta(\rho), \quad \gamma_{0,\pm} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{\mp\frac{i\pi}{4}(n-1)},$$
$$R^{\pm}_{\beta,N}(|\xi|) = \frac{\gamma_{N+1,\pm}}{\gamma_{0,\pm}}\cdot\frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{1-\delta}^{1-\delta/2} g_0(\rho)\,e^{\pm i\rho|\xi|}R^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}_{N,\pm}(\rho|\xi|)\,d\rho. \tag{29}$$

Рассмотрим мультипликаторы (28). После замены $1-\rho = \tau$ получаем
$$h^{\pm}_{\beta,k}(|\xi|) = \frac{e^{\pm i|\xi|}\,v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}\int\limits_{\delta/2}^{\delta} g_k(1-\tau)\,e^{\mp i|\xi|\tau}\,d\tau. \tag{30}$$

Проинтегрировав по частям интеграл в (30) $l+1$ раз, будем иметь

$$h^{\pm}_{\beta,k}(|\xi|)=\frac{e^{\pm i(1-\delta)|\xi|}\,v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+1+k}}\cdot\tilde v\big(|\xi|^2\big)\Bigg((\pm i)g_k(1-\delta)+\frac{(\pm i)^2 g_k'(1-\delta)}{|\xi|}+\ldots+\frac{(\pm i)^{l+1}g_k^{(l)}(1-\delta)}{|\xi|^l}+\frac{(\pm i)^{l+1}}{|\xi|^l}\int\limits_{\delta/2}^{\delta}g_k^{(l+1)}(1-\tau)\,e^{\mp i|\xi|(\tau-\delta)}\,d\tau\Bigg). \tag{31}$$

Положим $l=\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Заметим, что

$$v(|\xi|^2)\,e^{\pm i(1-\delta)|\xi|}\cdot|\xi|^{\frac{1-n}{2}-1-k}\in\mathscr{M}(L^1,H^1)$$

по теореме 1 (c). Кроме того, второй множитель в (31) принадлежит $\mathscr{M}(H^1,H^1)$ по теореме 2. Тогда $h^{\pm}_{\beta,k}(|\xi|)\in\mathscr{M}(L^1,H^1)$.

Рассмотрим (29). После замены $1-\rho=\tau$ и с учетом равенства (6), имеем

$$R^{\pm}_{\beta,N}(|\xi|)=\frac{B^{\pm}_N\,e^{\pm i|\xi|}\,v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+N+1}}\int\limits_{\delta/2}^{\delta}g_{N+1}(1-\tau)\,e^{\mp i|\xi|\tau}Q^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}_{N,\pm}\big((1-\tau)|\xi|\big)\,d\tau.$$

Заметим, что

$$B^{\pm}_N v(|\xi|^2)\,e^{\pm i|\xi|}\cdot|\xi|^{\frac{1-n}{2}-1}\in\mathscr{M}(L^1,H^1)$$

по теореме 1 (c) и

$$\frac{\tilde v(|\xi|^2)}{|\xi|^N}\int\limits_{\delta/2}^{\delta}g_{N+1}(1-\tau)\,e^{\mp i|\xi|\tau}Q^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}_{N,\pm}\big((1-\tau)|\xi|\big)\,d\tau\in\mathscr{M}(H^1,H^1)$$

также по теореме 2. Тогда $R^{\pm}_{\beta,N}(|\xi|)\in\mathscr{M}(H^1,H^1)$.

Резюмируя сказанное, получаем

$$\widehat{s^{\beta,\infty}_{\theta,2}}(\xi)\in\mathscr{M}(H^1,H^1). \tag{32}$$

Из (27) и (32), следует (26).

Покажем теперь, что

$$s^{\beta,0}_{\theta,+}(x)\equiv F^{-1}\Big(\widehat{s^{\beta,0}_{\theta,+}}(\xi)\Big)(x)\in\mathscr{K}(BMO,L^\infty), \tag{33}$$

тогда из (33) и (25) будет следовать, что

$$\widehat{s^{\beta,0}_{\theta,+}}(\xi)\in\mathscr{M}(BMO,L^\infty). \tag{34}$$

Заметим, что $s^{\beta,0}_{\theta,+}(x)\in\mathscr{S}$

$$\widehat{s^{\beta,0}_{\theta,+}}(0)=\big|S^{n-1}\big|\int\limits_{1-\delta}^{1}\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta-1}\,\theta(\rho)\,d\rho=0$$

в силу (24). Тогда $s^{\beta,0}_{\theta,+}(x)\in H^1$.

Далее, с учетом (3) и инвариантности нормы в пространстве $BMO(\mathbb{R}^n)$ относительно сдвига, имеем

$$\left\|(s^{\beta,0}_{\theta,+} * \varphi)(x)\right\|_{L^\infty} \leqslant \|s^{\beta,0}_{\theta,+}\|_{H^1}\|\varphi(x-\cdot)\|_{BMO} = \|s^{\beta,0}_{\theta,+}\|_{H^1}\|\varphi\|_{BMO}. \tag{35}$$

Из (35) следует (33) и, следовательно, (34). $\rhd$

Замечание 2. Легко видеть, что условие (24) является необходимым для ограниченности оператора $S^{\beta}_{\theta,+}$ из L^1 в H^1 и из BMO в L^∞.

Литература

1. *Miyachi A.* Notes on Fourier multipliers for H^p, BMO and the Lipschitz spaces // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA Math.—1983.—Vol. 30, № 2.—P. 221–242.
2. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA.—1981.—Vol. 28.—P. 267–315.
3. *Nogin V. A., Karasev D. N.* On the $\mathscr{L}$-characteristic of some potential-type operators with radial kernels, having singularities on a sphere // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2001.—Vol. 4, № 3.—P. 343–366.
4. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On the boundness of some potential-type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574.
5. *Fefferman C. L., Stein E. M.* H^p-spaces of several variables // Acta Math.—1972.—Vol. 129.—P. 137–193.
6. *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variable method, orthogonality, and oscillatory integrals.—Princeton: NJ. Princeton Univ. Press, 1993.—695 p.
7. *Fefferman C. L.* Characterizations of bounded mean oscillation // Bull. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 77.—P. 587–588.
8. *Calderon A. P., Torchinsky A.* Parabolic maximal functions associated with a distribution, II // Adv. in Math.—1977.—Vol. 24, № 2.—P. 101–171.
9. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: ИЛ, 1949.—798 с.
10. *Федорюк М. В.* Метод перевала.—М.: Наука, 1977.—368 с.

Статья поступила 20 ноября 2009 г.

Гиль Алексей Викторович
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: gil-alexey@yandex.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник лаб. вещественного анализа
E-mail: vnogin@ns.math.rsu.ru

ESTIMATES FOR SOME POTENTIAL-TYPE OPERATORS WITH OSCILLATING SYMBOLS

Gil A. V., Nogin V. A.

In the framework of Hardy spaces H^p, we study multidimensional potential-type operators whose kernels have singularities on the unit sphere. Necessary and sufficient conditions are obtained for such operators to be bounded from H^p to H^q, from BMO to L^∞, from L^1 to H^1 or from BMO to BMO.

Key words: convolution, oscillating symbol, BMO, $H^p - H^q$-estimates, multiplier, distribution, potential-type operator.