Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 3, С. 47–55

УДК **517.9**

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ (ПОЛНОТА, НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НУЛЯ И ПОРОЖДАЮЩИЕ ИХ ЭЛЕМЕНТЫ)

Ю. Ф. Коробейник

В работе исследуется связь между наличием в отделимом линейном топологическом пространстве нетривиальных разложений нуля по определенным системам элементов и полнотой таких систем. Вводится также понятие элемента, порождающего нетривиальное разложение нуля по системе X, и устанавливаются достаточные условия, при выполнении которых какой-либо элемент x будет порождающим нетривиальное разложение нуля по некоторым системам элементов. В заключение приводится ряд нерешенных задач по тематике статьи.

Ключевые слова: полнота системы элементов в линейном топологическом пространстве, нетривиальные разложения нуля.

1. Пусть H — отделимое линейное топологическое пространство (ЛТП) над полем скаляров Φ, где $\Phi = \mathbb{C}$ или $\Phi = \mathbb{R}$, и пусть Ω — бесконечное множество индексов из $\mathbb{C}$, а $X_\Omega := (x_\lambda\colon \lambda \in \Omega)$ — некоторое семейство попарно различных элементов из H. Всюду далее предполагается, что множество $\operatorname{span} X_\Omega$ (линейная оболочка X_Ω) плотно в H, т. е. $\overline{\operatorname{span} X_\Omega} = H$ и что любая конечная совокупность попарно различных элементов из X_Ω линейно независима в H. Из известного критерия полноты Банаха (см., например, [1]) следует что оператор $\ell\colon \forall\,\varphi \in H' \to \varphi(x_\lambda)$ отображает взаимно однозначно пространство H' всех линейных непрерывных на H функционалов на некоторое векторное пространство K_H^Ω функций, определенных и однозначных на Ω. Будем далее предполагать, что $K_H^\Omega \subseteq A_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$, где $A_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$ — пространство всех однозначных и локально аналитических на множестве Ω функций. (Напомним, что функция f *локально аналитична* на множестве Ω, если она аналитична в некоторой достаточно малой окрестности $|z-\alpha| < r(\alpha)$ каждой точки α из Ω.)

Наконец, всюду далее предполагается, что множество K_H^Ω инвариантно относительно деления на линейную функцию в следующем смысле: если $\beta \in \Omega$, $y \in K_H^\Omega$ и $\frac{y(\lambda)}{\lambda-\beta} \in A_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$, то $\frac{y(\lambda)}{\lambda-\beta} \in K_H^\Omega$.

Отсюда, применяя метод полной математической индукции (по p), легко установить, что если множество K_H^Ω инвариантно относительно деления на линейную функцию, $v \in K_H^\Omega$ и γ — нуль v из Ω кратности $p \geqslant 1$, то $\frac{v(\lambda)}{(\lambda-\gamma)^p} \in K_H^\Omega$. При этом мы говорим, что γ — нуль функции v кратности p, если $\frac{v(\lambda)}{(\lambda-\gamma)^p} \in A_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$, но $\frac{v(\lambda)}{(\lambda-\gamma)^{p+1}} \notin A_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$.

2. Считая, что все предположения п. 1 выполнены, возьмем какую-либо последовательность попарно различных индексов $\{\lambda_n\}$, положим $X := (x_{\lambda_k})_{k=1}^\infty$ и укажем простое достаточное условие полноты системы X в ЛТП H.

Приведем вначале один результат, неоднократно встречавшийся в литературе (правда, как правило, в более частных ситуациях).

Теорема 1. *Пусть система X неполна в H и пусть последовательность линейных агрегатов*

$$g_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} x_{\lambda_k}, \quad m_n \uparrow +\infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

стремится к нулю по топологии H. Тогда для любого номера $s_0 \geqslant 1$ предел $\lim_{n\to\infty} a_{s_0,n}$ существует и равен нулю.

$\lhd$ Согласно известному критерию Банаха полноты в H' найдется отличный от нулевого функционал φ_0 такой, что $\varphi_0(x_\lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \Omega$. Пусть $g_0(\lambda) := \ell(\varphi_0)$ и пусть λ_{s_0} — нуль g_0 кратности $q \geqslant 0$. Тогда, если $g_0^{\lambda_{s_0,q}}(\lambda) := \frac{g_0(\lambda)}{(\lambda-\lambda_{s_0})^q}$, то $g_0^{\lambda_{s_0,q}} \in K_H^\Omega$, причем $g_0^{\lambda_{s_0,q}}(\lambda_{s_0}) = d_0 \neq 0$ и $g_0^{\lambda_{s_0,q}}(\lambda_m) = 0$ для всех $m \geqslant 1$, $m \neq s_0$. Пусть теперь $\varphi_1 := \ell^{-1}(g_0^{\lambda_{s_0,q}})$. Тогда

$$0 = \varphi_1(0) = \varphi_1\Big(\lim_{n\to\infty} g_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(g_n) = \lim_{n\to\infty} a_{s_0,n} d_0.$$

Так как $d_0 \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} a_{s_0,n} = 0$. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть последовательность $\{g_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ линейных агрегатов элементов из X стремится к нулю в H и пусть существует $s_1 \geqslant 1$ такой, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_{s_1,n}| > 0$. Тогда система X полна в H.*

Это следствие и дает обещанное ранее простое достаточное условие полноты системы X в H.

Сформулируем еще два очевидных следствия теоремы 1, в которых H, Ω, X_Ω и X — те же, что и выше.

Следствие 2. *Пусть имеется ряд $\sum_{k=1}^\infty b_k x_{\lambda_k}$, хотя бы один из коэффициентов которого b_{m_0} отличен от нуля, а некоторая подпоследовательность $\{S_{n\ell}\}_{\ell=1}^\infty$, $S_{n_j} = \sum_{k=1}^{m_j} b_k x_{\lambda_k}$, $j = 1, 2, \dots$, его частных сумм сходится к нулю по топологии H. Тогда система X полна в H.*

Следствие 3. *Пусть существует сходящийся в H ряд $\sum_{k=1}^\infty b_k x_{\lambda_k}$, хотя бы один коэффициент b_k которого отличен от нуля и сумма которого равна нулю. Тогда система X полна в H.*

В соответствии с одним определением из [2, 3], последний результат можно перефразировать так.

Следствие 3$'$. *Если в H имеется нетривиальное разложение нуля (НРН) по системе X, то она полна в H.*

Напомним [2, 3], что последовательность $X = (x_k)_{k=1}^\infty$ допускает нетривиальное разложение нуля по системе X в H, если справедливо равенство $0 = \sum_{k=1}^\infty c_k x_k$, в котором ряд справа сходится в H, для любого $k \geqslant 1$ имеем $c_k \in \Phi$ и существует $k_0 \geqslant 1$ такой, что $c_{k_0} \neq 0$.

Далее, если H — полное отделимое локально выпуклое пространство (ПОЛВП) над тем же полем Φ, то говорят [2, 3], что в H имеется абсолютное нетривиальное разложение нуля (АНРН) по системе X, если справедливо хотя бы одно равенство вида $0 = \sum_{k=1}^\infty d_k x_k$, в котором ряд справа абсолютно сходится в H, причем для любого $k \geqslant 1$ $d_k \in \Phi$ и существует номер $k_1 \geqslant 1$ такой, что $d_{k_1} \neq 0$.

В связи с последним результатом представляет определенный интерес выяснение по возможности общих условий, при выполнении которых в H существует НРН по X. Приведем вначале один, возможно, самый простой, результат в этом направлении.

Теорема 2. *Пусть $X = \{x_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность собственных элементов линейного непрерывного (из ЛТП H в H) оператора $T\colon Tx_{\lambda_n} = \lambda_n x_{\lambda_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть, далее, $\alpha \in \Omega$, $\alpha \neq \lambda_n$ для всех $n \geqslant 1$ и x_α — ненулевой собственный элемент оператора $T\colon Tx_\alpha = \alpha x_\alpha$. Пусть, наконец, справедливо равенство*

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{\lambda_k}, \tag{1}$$

причем ряд справа сходится по топологии H. Тогда в H имеется НРН по системе X.

$\lhd$ Действительно, из соотношения (1) следует прежде всего, что существует $m_0 \geqslant 1$: $a_{m_0} \neq 0$. Далее, действуя на обе части равенства (1) оператором T, а затем вычитая из полученного равенства соотношение (1), предварительно умноженное на α, приходим к НРН по X в H:

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda_k - \alpha)x_{\lambda_k}; \quad a_{m_0}(\lambda_{m_0} - \alpha) \neq 0. \rhd$$

Замечание. Если выполнены все предположения теоремы 2 и, кроме того, ряд справа в (1) сходится абсолютно в H, то точно так же показываем, что в этом случае в H имеется АНРН по системе X.

3. Опишем теперь некоторые свойства неполных систем. Пусть по-прежнему H — отделимое ЛТП, $x_\lambda \in H$ для любого $\lambda \in \Omega$,

$$X_\Omega = \{x_\lambda \colon \lambda \in \Omega\}, \quad \overline{\operatorname{span} X_\Omega} = H;$$

$$\lambda_k \in \Omega \quad \forall\, x \geqslant 1 \quad \text{и} \quad X = \{x_{\lambda_k} \colon k = 1, 2, \ldots\}.$$

Вышеупомянутый критерий полноты Банаха можно высказать в такой эквивалентной форме: система X неполна в H тогда и только тогда, когда в K_H^Ω найдется отличная от тождественного нуля функция v, для которой множество $\Lambda := \{\lambda_k \colon k = 1, 2, \ldots\}$ является *аннулятором*, т. е. $v(\lambda_k) = 0$ для всех $k \geqslant 1$. (Как обычно, условимся говорить, что подмножество B множества Ω является *аннулятором* какой-либо функции $w(z)$ из K_H^Ω, если $B \subseteq w^{-1}(0)$.)

Теорема 3. *Пусть H, X_Ω и X — те же, что и в начале п. 3, и пусть еще K_H^Ω инвариантно относительно деления на линейную функцию, а система X неполна в H. Тогда в H' имеется биортогональная с X система функционалов $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$.*

$\lhd$ По критерию Банаха Λ является аннулятором некоторой отличной от тождественного нуля функции w из K_H^Ω. Если p_k — кратность нуля λ_k функции w, то функция $g_k(\lambda) := \frac{w(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{p_k}}$ принадлежит K_H^Ω. Пусть $\varphi_k := \ell^{-1}(g_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Ясно, что для любого $k \geqslant 1$ $\varphi_k(x_{\lambda_m}) = b_{k,m}$, где $b_{k,m} = 0$ при $k \neq m$ и $b_{k,k} = w^{(p_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Таким образом, $\left\{\frac{\varphi_n}{b_{n,n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная с X система функционалов из H'. $\rhd$

Следующий простой результат дополняет теорему 3.

Теорема 4. *Пусть отделимое ЛТП H, Ω, X и K_H^Ω — те же, что и в начале п. 1, и, кроме того, K_H^Ω инвариантно относительно умножения на многочлен. Пусть, далее, для некоторого $n_0 \geqslant 1$ в K_H^Ω найдется функция v_{n_0} такая, что $v_{n_0}(\lambda_m) = 0$ при $m \neq n_0$,* *но $v_{n_0}(\lambda_{n_0}) \neq 0$. Тогда в K_H^Ω существует отличная от тождественного нуля функция w с аннулятором Λ.*

$\lhd$ Для доказательства этой теоремы достаточно положить $w(\lambda) = v_{n_0}(\lambda)(\lambda - \lambda_{n_0})$. $\rhd$

Следствие. *В предположениях теоремы 4 в H' имеется биортогональная с X система функционалов (и, соответственно, система X неполна в H).*

В связи с теоремой 4 заметим, что если в H' существует биортогональная с системой X последовательность функционалов $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, то не найдется ни одной последовательности агрегатов $\{g_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ указанного в теореме 1 вида, для которой бы выполнялись предположения ее следствия 1. Таким образом, следствие 1 к подобной ситуации неприменимо. В частности, так будет, когда X — базис Шаудера в H, т. е. когда любой элемент y из H можно представить единственным образом в виде сходящегося в H ряда $y = \sum_{k=1}^\infty y_k x_{\lambda_k}$, где для любого $k \geqslant 1$ $y_k = \varphi_k(y)$ и $\varphi_k \in H'$. Из этого определения следует, что $\varphi_k(x_{\lambda_m}) = \delta_{k,m}$, где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера: $\delta_{k,m} = 0$, если $k \neq m$, и $\delta_{k,k} = 1$ для всех $k, m \geqslant 1$.

Хотя следствия 1–3 теоремы 1 дают лишь достаточные условия полноты (для системы X, не обладающей биортогональной с ней системой функционалов из H'), тем не менее они (особенно следствие $3'$) позволили получить результаты об усиленной полноте (возможности представления любого элемента из H в виде сходящегося в H ряда по системе X) в довольно общих ситуациях (см. по этому поводу, например, работы [2, 3]).

4. Переходя к более конкретным ситуациям, ограничимся в данной работе, пожалуй, наиболее важным случаем, когда $x_\lambda = e^{\lambda z}$.

В качестве H возьмем вначале пространство Фреше $A(\mathscr{G})$ всех функций, аналитических в некоторой содержащей начало координат выпуклой (не обязательно ограниченной) области $\mathscr{G}$ с опорной функцией $g(-\varphi) > 0$, со стандартной проективной топологией равномерной сходимости на каждом компакте из $\mathscr{G}$. Заметим, что условие $0 \in \mathscr{G}$ принято для простоты изложения, и от него легко избавиться с помощью линейной замены независимой переменной z. Положим $\Omega = \mathbb{C}$. Как хорошо известно (см., например, [4, 5]), оператор ℓ: $\varphi \in A'(\mathscr{G}) \mapsto \varphi(e^{\lambda z})$ отображает взаимно однозначно $A'(\mathscr{G})$ на пространство $K^{\mathbb{C}}_{A(\mathscr{G})} = [1, g(\varphi))$ всех целых функций, у которых или порядок < 1, или порядок равен единице, но индикатор при этом порядке строго меньше $g(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Пространство $K^{\mathbb{C}}_{A(\mathscr{G})} = \ell(A'(\mathscr{G}))$, как нетрудно проверить, инвариантно относительно деления на линейную функцию и умножения на любой многочлен. Если в качестве Λ взять любое множество попарно различных комплексных чисел λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, а в качестве T — оператор дифференцирования, очевидно, непрерывный из $A(\mathscr{G})$ в $A(\mathscr{G})$, то к данной ситуации применимы все утверждения, установленные в пп. 2–3. Предоставив их формулировку для данного конкретного случая читателю, ограничимся лишь двумя замечаниями.

Прежде всего, следствие 2 теоремы 1 при $H = A(\mathscr{G})$, $\Omega = \mathbb{C}$, $x_\lambda = e^{\lambda z}$ было установлено ранее в работе [2] (см. теорему 1 этой статьи). Далее, теорему 2 в данном конкретном случае можно несколько усилить, правда, при некоторых дополнительных предположениях. Именно, справедлива

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{G}$ — произвольная область в $\mathbb{C}$ и H_1 — отделимое ЛТП функций, содержащееся в $A(\mathscr{G})$ и, в свою очередь, содержащее все функции вида $\mathscr{P}(z)e^{\beta z}$, где $\beta \in \mathbb{C}$, а $\mathscr{P}(z)$ — произвольный многочлен. Предположим еще, что операции дифференцирования, а также умножения на любую экспоненту $e^{\gamma z}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, непрерывны из H_1 в H_1. Пусть, наконец, выполняется одно из следующих двух условий, в которых $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \neq \lambda_m$ при $k \neq m$, $\Lambda = \{\lambda_k \colon k \geqslant 1\}$ и $E_\Lambda := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$:*

a) найдутся число α из $\mathbb{C}\big|_\Lambda$ и отличный от тождественного нуля многочлен $\mathscr{P}_0(z)$

степени $n_0 \geqslant 0$ такие, что всюду в $\mathscr{G}$ $\mathscr{P}(z)e^{\alpha z} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}$, причем ряд справа сходится по топологии H_1;

б) существуют номер $k_1 \geqslant 1$ и многочлен $\mathscr{P}_1(z)$ степени $n_1 \geqslant 1$ такие, что для любого $z \in \mathscr{G}$ $\mathscr{P}_1(z)e^{\lambda_{k_1} z} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z}$, причем и здесь ряд справа сходится в H_1.

Тогда в H_1 имеется НРН по системе E_Λ.

$\triangleleft$ Пусть сначала выполнено предположение а). Тогда для любого $z \in \mathscr{G}$

$$\mathscr{P}_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{(\lambda_k - \alpha)z}. \tag{1}$$

Учитывая, что ряд справа в равенстве (1) сходится в H_1, и дифференцируя это равенство $n_0 + 1$ раз, получим:

$$\begin{aligned} 0 = \mathscr{P}_0^{(n_0+1)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\lambda_k - \alpha)^{n_0+1} e^{(\lambda_k - \alpha)z} \\ &= e^{-\alpha z} \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\lambda_k - \alpha)^{n_0+1} e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathscr{G}. \end{aligned}$$

Отсюда $0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\lambda_k - \alpha)^{n_0+1} e^{\lambda_k z}$ для тех же z. Далее, из соотношения (1) следует, что существует $k_0 \geqslant 1$ такое, что $b_{k_0} \neq 0$. Но тогда $b_{k_0}(\lambda_{k_0} - \alpha)^{n_0+1} \neq 0$ и $0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\lambda_n - \alpha)^{n_0+1} e^{\lambda_n z}$ — НРН в H_1 по системе E_Λ.

Если же выполняется условие б), то из равенства

$$\mathscr{P}_1(z) - d_{k_1} = {\sum_{k=1}^{\infty}}' d_k e^{(\lambda_k - \lambda_{k_1})z}, \quad z \in \mathscr{G}, \tag{2}$$

правая часть которого сходится в H_1, а символ ${\sum\limits_{k=1}^{\infty}}'$ означает суммирование по всем номерам $k \geqslant 1$, отличным от k_1, находим

$$0 = \big(P_1(z) - d_{k_1}\big)^{(n_1+1)} = {\sum_{k=1}^{\infty}}' d_k \big(\lambda_k - \lambda_{k_1}\big)^{n_1+1} e^{(\lambda_k - \lambda_{k_1})z},$$

и мы вновь приходим к НРН в H_1 по системе E_Λ: $0 = {\sum_{k=1}^{\infty}}' d_k (\lambda_k - \lambda_{k_1})^{n_1+1} e^{\lambda_k z}$, $z \in \mathscr{G}$ (из (2) следует, что существует $k_2 \geqslant 1$ такое, что $k_2 \neq k_1$ и $d_{k_2} \neq 0$). $\triangleright$

В теоремах 1–4 в качестве H, а также в теореме 5 в качестве H_1, можно взять, например, такие пространства целых функций, с соответствующей проективной или индуктивной топологиями:

I) пространства Фреше (более того, M^*-пространства в терминологии Себаштьяна-и-Силвы [6, 7]): 1) $A(\mathbb{C})$; 2) $[\rho, \infty]$ — пространство всех целых функций порядка не выше, чем ρ, где $\rho \geqslant 1$; 3) $[\rho, 0]$ — пространство всех целых функций роста не выше, чем порядка ρ и нулевого типа ($1 < \rho < \infty$), и т. д.;

II) LN^*-пространства в терминологии Себаштьяна-и-Силвы [6, 7]: 1) $[\rho, \infty)$ — пространство всех целых функций, у которых или порядок меньше ρ, или порядок равен ρ, а тип нормален (конечен) ($\rho \geqslant 1$); 2) F_∞ — всех целых функций конечного порядка (т. е. $F_\infty = \bigcup\limits_{0<\rho<\infty} [\rho, \infty]$) и т. д.

Для всех этих пространств полагаем $\mathscr{G} = \Omega = \mathbb{C}$.

5. Пусть теперь F — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, а $\{\mathscr{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность областей в $\mathbb{C}$ такая, что для любого $n \geqslant 1$ $\mathscr{G}_n \supset \mathscr{G}_{n+1} \supset F = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathscr{G}_m$.

В качестве «базового» пространства H теперь возьмем LN^*-пространство $H(F)$ всех аналитических ростков на F, с топологией индуктивного предела: $H(F) = \operatorname{ind}_n A(\mathscr{G}_n)$. Очевидно, что $H(F)$ инвариантно относительно умножения на любой многочлен, причем операции дифференцирования и умножения на многочлен непрерывны из $H(F)$ в $H(F)$.

В случае когда F — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, содержащий начало координат, с опорной функцией $f(-\varphi) \geqslant 0$, оператор ℓ такой, что для любого $\varphi \in H'(F) \to \varphi(e^{\lambda_z})$, как известно (см., например, [4, 5]), отображает взаимно однозначно $H'(F)$ на пространство $K_{H(F)}^{\mathbb{C}} = [1, f(\varphi)]$ всех целых функций, у которых или порядок меньше единицы, или порядок равен единице, а индикатор при этом порядке не превосходит $f(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. При этом пространство $[1, f(\varphi)]$ (при $f \geqslant 0$) инвариантно относительно деления на линейную функцию и умножения на произвольный многочлен. Поэтому при $\Omega \subset \mathbb{C}$, $x_\lambda = e^{\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $H = H(F)$ справедливы теоремы 1–4. Имеет место и аналог теоремы 5, в котором произвольную область $\mathscr{G}$ следует заменить любым компактом F в $\mathbb{C}$, а в качестве H_1 взять любое отделимое ЛТП, такое что $S \cdot E_{\mathbb{C}} \subset H_1 \subset H(F)$ (здесь $S \cdot E_{\mathbb{C}}$ — множество всех функций вида $\mathscr{P}(z)e^{\lambda z}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $P(z)$ — произвольный многочлен) и операции дифференцирования и умножения на любую экспоненту непрерывны из H_1 в H_1.

Возвращаясь к описанию неполных систем, дадим такое определение. Пусть для любого $n \geqslant 1$ $\varphi_n(z) \in A(\mathbb{C})$. Назовем систему $\Phi(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *универсально неполной* в $\mathbb{C}$, если эта система неполна в любом пространстве $A(\mathscr{G})$, где $\mathscr{G}$ — произвольная область в $\mathbb{C}$. Установим критерий того, что система экспонент $E_\Lambda := \{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, является универсально и неполной в $\mathbb{C}$. Приведем вначале простой результат, прямо вытекающий из критерия Банаха полноты, уже неоднократно использовавшегося выше. Пусть $0 < r \leqslant \infty$, $K_r := \{z\colon |z| < r\}$. Тогда сильное сопряженное к $A(K_r)$ пространство $(A(K_r))'_\beta$ топологически изоморфно LN^*-пространству $[1, r)$ всех целых функций, у которых или порядок меньше 1, или порядок равен 1, а тип меньше r (см., например, [5, 7]). Система E_Λ, где $\Lambda := \{\lambda_k\colon k = 1, 2, \dots\}$, неполна в $A(K_r)$ тогда и только тогда, когда в классе $[1, r)$ найдется отличная от тождественного нуля функция (далее подобную функцию будем ради краткости называть ненулевой) $h(z)$ такая, что $h(\lambda_n) = 0$, для любого $n \geqslant 1$. При этом функция h в каждой точке λ_n может иметь нуль произвольной кратности, а также может иметь и другие нули, кроме $\{\lambda_n\}_{k=1}^{\infty}$. Если $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество всех нулей функции h, причем каждый нуль повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность, то согласно [8] $\overline{\lim}_{k\to\infty} k/|\mu_k| \leqslant er$ и подавно $\overline{\lim}_{k\to\infty} k/|\lambda_k| \leqslant er$. Отсюда следует такой результат:

Теорема 6. *Пусть имеется последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $r_n \downarrow 0$ и E_Λ неполна в $A(K_{r_n})$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = 0. \tag{3}$$

Заметим, что если выполнено условие (3), то, как известно (см., например, [9]) функция $g_0(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z^2/\lambda_n^2\right)$ принадлежит классу $[1, 0]$, и справедливо

Следствие. *Если выполнены предположения теоремы* 6, *то в классе* $[1, 0]$ *существует ненулевая функция $g(\lambda)$ такая, что $g(\lambda_n) = 0$ для любого $n \geqslant 1$.*

Обозначим символом $\bar{A}_0$ LN^*-пространство всех аналитических в точке $z = 0$ ростков, с обычной индуктивной топологией: $\bar{A}_0 := \operatorname{ind}_{r\downarrow 0} A(K_r)$. Теми же рассуждениями получаем такой аналог следствия теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть система E_Λ неполна в $\bar{A}_0$. Тогда в классе $[1,0]$ имеется ненулевая функция $g(\lambda)$, для которой $g(\lambda_n) = 0$ для любого $n \geqslant 1$.*

Теоремы 6 и 7 допускают обращение в усиленной форме.

Теорема 8. *Пусть в классе $[1,0]$ найдется ненулевая функция $g_1(\lambda)$ такая, что $g_1(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда E_Λ — универсально неполная система в $\mathbb{C}$.*

$\lhd$ Пусть $g_1(\lambda) = \sum_{k=n_0}^{\infty} g_k \lambda^k$, где $0 \leqslant n_0 < \infty$ и $g_{n_0} \neq 0$. Так как $g_1 \in [1,0]$, то оператор $L_1 y := \sum_{k=n_0}^{\infty} g_k y^{(k)}(z)$, как известно [10, 11], действует непрерывно из $A(\mathscr{G})$ в $A(\mathscr{G})$, какова бы ни была область $\mathscr{G}$ в $\mathbb{C}$. При этом, если $\operatorname{span} E_\Lambda$ — линейная оболочка системы E_Λ, то $(L_1 v)(z) = 0$ для всех $v \in \operatorname{span} E_\Lambda$ и $z \in \mathbb{C}$.

Рассуждая от противного, допустим, что система E_Λ полна в пространстве $A(\mathscr{G}_0)$, где $\mathscr{G}_0$ — некоторая область в $\mathbb{C}$. Если $(\bar{E}_\Lambda)_{\mathscr{G}_0}$ — замыкание E_Λ по топологии (Фреше) $A(\mathscr{G}_0)$, то в силу непрерывности оператора L_1 в $A(\mathscr{G}_0)$ $(L_1 w)(z) = 0$ для любых $z \in \mathscr{G}_0$, $w \in (\bar{E}_\Lambda)_{\mathscr{G}_0}$. Но по предположению $(\bar{E}_\Lambda)_{\mathscr{G}_0} = A(\mathscr{G}_0)$. Следовательно, $(L, y)(z) = 0$ для любых $z \in \mathscr{G}_0$, $y \in A(\mathscr{G}_0)$. В то же время, функция $y_0(z) = z^{n_0}$ принадлежит $A(\mathscr{G}_0)$ и $L_1(z^{n_0}) \equiv g_{n_0}(n_0)! \neq 0$. Полученным противоречием и завершается доказательство. $\rhd$

Следствие. *Для того, чтобы система E_Λ была универсально неполной в $\mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы в классе $[1,0]$ нашлась ненулевая функция $h(\lambda)$, для которой $h(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$*

6. В связи с теоремами 2 и 5 естественно дать такие определения. Элемент x из ЛТП H назовем порождающим НРН по системе $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ элементов из H, если из того, что x можно представить как сумму сходящегося в H ряда по X: $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, следует, что в H имеется НРН по системе X. Аналогично определяется элемент из ПОЛВП H, порождающий АНРН по X в H. Например, согласно теореме 2 и замечанию к ней, любой ненулевой собственный элемент оператора T, не принадлежащий некоторой фиксированной последовательности собственных элементов $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, порождает НРН по X в H, если H — ЛТП, и АНРН по X в H, если H — ПОЛВП. Точно так же по теореме 5 порождают НРН и АНРН по системе экспонент E_Λ в пространстве $A(\mathscr{G})$ функции $\mathscr{P}(z)e^{\alpha z}$, где $\alpha \in \mathbb{C} \backslash_\Lambda$, а $P(z)$ — любой отличный от тождественного нуля многочлен степени $\geqslant 0$, а также $\mathscr{P}_1(z)e^{\lambda_{k_0} z}$, где $k_0 \geqslant 1$, и $\mathscr{P}_1(z)$ — произвольный многочлен степени $n_1 \geqslant 1$.

Как хорошо известно, любая конечная система экспонент с попарно различными показателями линейно независима в $A(\mathscr{G})$, где $\mathscr{G}$ — произвольная область в $\mathbb{C}$. В то же время из теоремы 5 следует, что никакая бесконечная система экспонент с попарно различными показателями не может быть базисом в $A(\mathscr{G})$ или же абсолютным базисом в $A(\mathscr{G})$, если $\mathscr{G}$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Этот результат, установленный автором с помощью оператора $Ty = y'$, был приведен в его лекции, прочитанной на Зимней Саратовской Школе по теории функций и приближений в 1983 г. [12].

7. Понятия НРН и АНРН тесно связаны с представляющими системами (ПС) в ЛТПН и, соответственно, с абсолютно представляющими системами (АПС) в ПОЛВП H. Напомним (см., например, [2, 3]), что последовательность $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ из ЛТП H над полем скаляров Φ называется ПС в H, если любой элемент x из H представим (не обязательно единственным образом) в виде сходящегося в H ряда вида $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, в котором для любого $k \geqslant 1$ $c_k \in \Phi$. Аналогично (см. там же) дается определение АПС в ПОЛВП H над полем скаляров Φ, где $\Phi = \mathbb{C}$ или $\Phi = \mathbb{R}$, с той лишь разницей, что для любого x из H требуется абсолютная сходимость в H ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, сумма которого равна x.

Связь между наличием АНРН по какой-либо системе $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в ПОЛВП H и свойством этой системы быть АПС в H, исследовалась вначале для случая, когда X — система экспонент, а H — пространство функций, аналитических в ограниченной выпуклой области $\mathscr{G} \subset \mathbb{C}$ или же некоторое подпространство $E(\mathscr{G})$ пространства $A(\mathscr{G})$, состоящее из целых функций экспоненциального типа и определенного роста (см. по этому поводу, например, статьи [2, 3, 13], а также монографию [14, пп. 5.4.7–5.4.8, с. 302–305], содержащие ссылки на ряд других работ). Не останавливаясь здесь более подробно на этом, отметим лишь, что, на наш взгляд, было бы весьма интересно установить аналогичные результаты о связи между АПС и АНРН по системе экспонент в пространстве $A(\mathscr{G})$ в случае, когда $\mathscr{G}$ — неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, а также в многомерной ситуации, т. е. для выпуклой области $\mathscr{G}$ в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$.

Остается пока открытым и довольно интересный, но, по-видимому, весьма трудный вопрос о характеризации элементов, порождающих НРН или АНРН по произвольной системе элементов в ЛТП (соответственно, ПОЛВП) H.

Литература

1. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1980.—Т. 44, № 5.—С. 1066–1114.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
4. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах.—М.: Наука, 1982.—240 с.
5. *Хавин В. П.* Пространства аналитических функций // Мат. анализ. Итоги науки. Сер. мат.—М.: ВИНИТИ, 1966.—С. 76–164.
6. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. Сб. перев.—1957.—Т. 1, № 1.—С. 60–70.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Физматгиз, 1959.—684 с.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
9. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
10. *Valiron G.* Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constant // Annal. Scient. de l'Éc. Norm. Sup. Sér. 3.—1929.—Vol. 49.—P. 25–53.
11. *Polya G.* Eine Verallegemeinerung des Fabryschen Lückensatzes // Nachr. Geselsch. Wissen. Göttingen.—1927.—P. 187–195.
12. *Коробейник Ю. Ф.* Некоторые вопросы теории представляющих систем // Теория функций и приближений. Тр. Саратов. зимн. школы. Ч. 1.—Саратов: Изд-во СГУ, 1983.—С. 3–16.
13. *Brown L., Shields A., Zeller K.* On absolutely convergent exponential sums // Trans. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 96, № 1.—P. 162–183.
14. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы: теория и приложения.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—336 с.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. моногр. Вып. 1).

Статья поступила 18 июня 2010 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный федеральный университет,
профессор каф. математического анализа
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник лаб. комплексного анализа
E-mail: `kor@math.rsu.ru`

SOME TOPICS OF THE THEORY OF LINEAR TOPOLOGICAL SPACES (COMPLETENESS, NON-TRIVIAL EXPANSIONS OF ZERO AND THEIR GENERATORS)

Korobeinik Yu. F.

The connection between the existence of non-trivial expansions of zero with respect to some system of elements in a separated linear topological space and the completeness of such systems is investigated. The notion of a generator of non-trivial expansions of zero with respect to the system X is introduced and some sufficient conditions under which the element x generates non-trivial expansions of zero with respect to certain systems of elements are found.

Key words: complete system of elements in topological vector space, nontrivial expansions of zero.