*Владикавказский математический журнал*
*2010, Том 12, Выпуск 3, С. 56–66*

*УДК* **517.633**

# О ВЗАИМОСВЯЗИ ДВУХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА[1]

**В. Б. Левенштам**

В работе рассмотрена начально-краевая задача для уравнений Навье — Стокса с полиномиально зависящей от неизвестной (скорости) массовой силой. Введены определения ее решения и обобщенного решения. Получены условия, при которых обобщенное решение является решением.

**Ключевые слова:** уравнения Навье — Стокса, решение, обобщенное решение.

В работе рассматривается начально-краевая задача для эволюционной системы дифференциальных уравнений, которую мы, следуя некоторым авторам (см., например, [1]), называем уравнениями Навье — Стокса. В отличие от традиционных уравнений Навье — Стокса (см., например, [2, с. 172]) здесь роль массовой силы играет выражение (правая часть уравнения (1), см. ниже), которое зависит не только от независимых переменных пространства-времени $x$, $t$, но и от неизвестной вектор-функции — скорости $v$. В работе вводятся определения решения указанной задачи и ее обобщенного решения. При этом решение, разумеется, является и обобщенным решением. Доказано, что при достаточной гладкости данных задачи верно и обратное: обобщенное решение является ее решением. Используемые здесь определения решения и обобщенного решения естественным образом возникли при обосновании автором метода усреднения для уравнений Навье — Стокса, когда массовая сила содержит зависящие от скорости течения жидкости высокочастотные слагаемые с большими амплитудами. Представленные в работе результаты имеют, на наш взгляд, и самостоятельный интерес. Близкие рассуждения в краткой форме излагались в [3, доказательство п. 2 теоремы], где исследовалась задача о конвекции жидкости.

**1**. Пусть $\Omega$ — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с $C^2$-гладкой границей $\partial\Omega$, $m$ — целое неотрицательное, $n$ — натуральное, $\nu$ и $T$ — положительные числа. В цилиндре $Q = \bar{\Omega} \times [0, T]$ рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla P + (v, \nabla)\, v = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, x, t) + b(v, x, t), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{2}$$

$$v\big|_{\partial\,\Omega \times (0,T]} = 0, \tag{3}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \tag{4}$$

в которой неизвестными являются вектор-функция $v(x, t)$ и функция $P(x, t)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^1$ соответственно.

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00287.

Отметим, что слагаемое $(v, \nabla)\, v = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\,(v_j\, v)$ в силу (2) можно было бы отнести к следующему слагаемому уравнения (1), но в этом случае стала бы менее наглядной связь (1) с уравнениями Навье — Стокса в их традиционной форме, когда правая часть (1) имеет вид $f(x,t)$.

Прежде чем описать ограничения на входящие в уравнения (1), (4) вектор-функции, введем ряд банаховых пространств. Условимся при этом одним и тем же символом, скажем, $B$ обозначать как соответствующее банахово пространство скалярных функций, так и банахово пространство трехмерных вектор-функций $u$ с компонентами $u_j \in B$ и нормой $\|u\|_B = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} \|u_j\|_B$. Символом $C([0,\tau], B)$, где $B$ — вещественное банахово пространство, будем обозначать банахово пространство непрерывных функций (вектор-функций) $u : [0,T] \to B$ с max-нормой. Символом $S_q$, $q > 1$, обозначим банахово пространство, являющееся замыканием по норме $L_q \equiv L_q(\Omega)$ множества вещественных трехмерных непрерывно дифференцируемых в $\Omega$ соленоидальных ($\operatorname{div} v = 0$) вектор-функций $v$ с равной нулю на $\partial\,\Omega$ нормальной компонентой. Символом $\overset{\circ}{S}{}^2_q$, $q > 1$, обозначим замыкание по норме $W_q^2 \equiv W_q^2(\Omega)$ множества заданных в $\Omega$ гладких финитных вещественных трехмерных вектор-функций.

Будем предполагать, что вектор-функции $a_j(v,x,t)$ и $b(v,x,t)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$ имеют следующую структуру

$$a_j = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} a_{jk}, \qquad b = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} b_k,$$

где $a_{jk}$ и $b_k$ являются однородными формами степени $k$ относительно $v \in \mathbb{R}^3$, т. е. их компоненты $a_{jki}$ и $b_{ki}$, $i = 1,2,3$, имеют вид:

$$a_{jki}(v,x,t) = \sum_{|s|=k} a^s_{jki}(x,t)\, v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3}, \qquad b_{ki}(v,x,t) = \sum_{|s|=k} b^s_{ki}(x,t)\, v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3}.$$

Здесь $s = (s_1, s_2, s_3)$, $s_i = 1, \ldots, k$, $|s| = s_1 + s_2 + s_3$, $v_i$, $i = 1,2,3$, — компоненты вектора $v$, а вещественные функции $a^s_{jki}, b^s_{ki} \in C([0,T], L_\infty(\Omega))$, $v_0 \in S_{q_0}$, $q_0 > \max\,(3(m-1), 3)$.

**2**. Введем определения решения и обобщенного решения начально-краевой задачи (1)–(4).

*Решением* задачи (1)–(4) назовем определенную в цилиндре $Q$ трехмерную вещественную вектор-функцию $v(x,t)$, для которой найдется определенная в том же цилиндре скалярная вещественная функция $P(x,t)$ такая, что при некотором $q > 1$ будут выполнены следующие условия:

1) вектор-функции $\hat{v}(t) = v(\cdot,t)$ и $\hat{P}(t) = P(\cdot,t)$ являются непрерывными, как отображения: $\hat{v} : [0,T] \to S_q$, $\hat{v} : (0,T] \to \overset{\circ}{S}{}^2_q$, $\hat{P} : (0,T] \to W_q^1(\Omega)$, и равенство (4) выполнено в $S_q$;

2) отображение $\hat{v} : (0,T) \to S_q$ непрерывно дифференцируемо и равенство (1) справедливо при всех $t \in (0,T)$ в $S_q$;

3) равенство (2) при $(x,t) \in \bar{\Omega} \times (0,T]$ и равенство (3) выполняются в обычном классическом смысле.

Прежде чем сформулировать определение обобщенного решения задачи (1)–(4), опишем известную процедуру (см., например, [4]) перехода от задачи (1)–(4) к соответствующему интегральному уравнению. Предварительно напомним некоторые определения и вспомогательные результаты.

Пусть $\Pi : L_q \to S_q$, $q > 1$, — известный (см., например, [2] или [5, с. 58]) в математической гидродинамике проектор, а $A_0 = -\nu\Pi\Delta$ — действующий в $S_q$ оператор с областью определения $D(A_0) = \overset{\circ}{S}{}^2_q$. Хорошо известно (см., например, [5]), что оператор $A_0$ — замкнут, а $-A_0$ порождает в $S_q$ аналитическую полугруппу $e^{-tA_0}$, $t \geqslant 0$. Более того, оператор $A_0$ сильно позитивен [4, 5], а потому определены его дробные степени $A_0^\gamma$, $\gamma > 0$. Через $\overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_q$ будем обозначать банахово пространство, элементы которого принадлежат области определения оператора $A_0^\gamma$ и снабжены нормой $\|u\|_{\overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_q} = \|A_0^\gamma u\|_{S_q}$. Отметим еще известные [4, 5] равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, e^{-tA_0}u = A_0 e^{-tA_0}u, \quad u \in S_q, \tag{5}$$

$$A_0 e^{-tA_0}u = e^{-tA_0}A_0 u, \quad u \in \overset{\circ}{S}{}^2_q. \tag{6}$$

В работе будут использоваться следующие известные важные оценки.

**Предложение** (см. [4–6]). *Для любых* $q \geqslant r > 1$, $\beta = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) < \frac{1}{2}$ *и* $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *найдется такая постоянная* $c$, *что при всех* $u \in L_r$, $|\arg\lambda| \leqslant \varphi$ *и* $t, t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, *выполняются неравенства:*

$$\left\|(\lambda I + A_0)^{-1}\, \Pi\, u\right\|_{W_q^k} \leqslant c(1 + |\lambda|)^{\beta - 1 + \frac{k}{2}}\, \|u\|_{L_r}, \quad k = 0, 1, \tag{7}$$

$$\left\|(\lambda I + A_0)^{-1}\Pi \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L_q} \leqslant c(1 + |\lambda|)^{\beta - \frac{1}{2}}\, \|u\|_{L_r}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{8}$$

$$\left\|e^{-tA_0}\Pi\, u\right\|_{W_q^k} \leqslant c\, t^{-\beta - \frac{k}{2}}\, \|u\|_{L_r}, \quad k = 0, 1, \tag{9}$$

$$\left\|e^{-tA_0}\Pi \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L_q} \leqslant c\, t^{-\beta - \frac{1}{2}}\, \|u\|_{L_r}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$\left\|A_0^\alpha\, e^{-tA_0}\, \Pi\, u\right\|_{L_q} \leqslant c\, t^{-\beta - \alpha} \|u\|_{L_r}, \tag{11}$$

$$\left\|A_0^\alpha \left[e^{-t_2 A_0} - e^{-t_1 A_0}\right] \Pi\, u\right\|_{L_q} \leqslant c(t_2 - t_1)^\mu t_1^{-\beta - \alpha - \mu} \|u\|_{L_r}, \tag{12}$$

$$\left\|\left[e^{-t_2 A_0} - e^{t_1 A_0}\right] \Pi\, u\right\|_{W_q^k} \leqslant c(t_2 - t_1)^{-\mu} t_1^{-\beta - \frac{k}{2} - \mu} \|u\|_{L_r}, \quad k = 0, 1, \tag{13}$$

$$\left\|\left[e^{-t_2 A_0} - e^{-t_1 A_0}\right] \Pi \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_q} \leqslant c(t_2 - t_1)^{-\mu} t_1^{-\beta - \frac{1}{2} - \mu} \|u\|_{L_r}. \tag{14}$$

Оценки (7) при $k = 0$ и (8) установлены в [5, лемма 4.1, теоремы 6.1, 6.2]. Неравенства (9) при $k = 0$ и (10) выводятся из (7) при $k = 0$ и (8) с использованием интегрального представления полугруппы через резольвенту порождающего оператора [4, с. 269]:

$$e^{-tA_0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\arg z = \mp\varphi} e^{\lambda t} (\lambda I + A_0)^{-1} d\lambda.$$

При $q = r$ оценка (11) установлена в [4, теорема 14.11], а оценка (12) выведена из последней в [6, лемма 3.1]. При $q \neq r$ дополнительно нужно учесть (9) при $k = 0$. Неравенства (13) при $k = 1$ и (14) выводятся из (9) при $k = 1$ и (10) так же, как (12) в [6]. Отметим, наконец, что оценки (7), (9) и (13) при $k = 1$ являются простыми следствиями оценок (8), (10) и (14) соответственно. Так, например, (7) вытекает из (8) и свойства самосопряженности $(\lambda I + A_0)^{-1}$ в $S_2$ [5] на основании следующей цепочки соотношений:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\,(\lambda I + A_0)^{-1}\Pi\, u(x)\, v(x)\, dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} u(x)\,(\lambda I + A_0)^{-1}\Pi\frac{\partial}{\partial x_i}\, v(x)\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|u\|_{L_r}\left\|(\lambda I + A_0)^{-1}\Pi\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_{r'}} \leqslant c\big(1+|\lambda|\big)^{\beta-\frac{1}{2}}\,\|u\|_{L_r}\|v\|_{L_{q'}},$$

где $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, $u$, $v$ — гладкие финитные в $\Omega$ вектор-функции.

Предположим на некоторое время, что $a^s_{jki} \in C\left([0,T], W^1_\infty\right)$, и пусть $v(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), $q>3$. Подействовав на уравнение (1) пректором $\Pi$ и обозначив $v(t) = \Pi\, v(\cdot,t) = v(\cdot,t)$, $v(0)=v(\cdot,0)=v_0$, перейдем от начально-краевой задачи (1)–(4) к задаче Коши в $S_{p_0}$ для абстрактного параболического уравнения:

$$\frac{dv}{dt} + A_0 v = \Pi\Big[-(v,\nabla)\,v + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\,a_j(v,\cdot,t) + b\,(v,\cdot,t)\Big] \equiv \Pi\psi_1(v,t) \equiv \psi(v,t), \quad t\in(0,T],$$
$$v(0)=v_0.$$

Из результатов [4, 5] теперь следует, что всякое решение $v(\cdot,t)$ задачи (1)–(4) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)A_0}\psi\,[v(\tau),\tau]\,d\tau \equiv [N(v)]\,(t). \tag{15}$$

Обозначив через $A$ набор функций $a^s_{jki}$, $i,j=1,2,3$, $k=0,\dots,m$, $|s|=k$, положим $N(v)\equiv\hat N(A,v)$. Из оценок (9), (10) и неравенства Гёльдера легко следует непрерывность оператора $\hat N : C([0,T],L_\infty)\times C([0,T],S_{p_0}) \to C([0,T],S_{p_0})$, где $p_0$ то же, что и выше. В связи с этим вернемся к исходным предположениям относительно функций $a^s_{jki}$ и от оператора $N(v)$ перейдем к его замыканию по $(A,v)$, сохраняя за последним прежнее обозначение. Проведенные рассуждения приводят к следующему определению.

*Обобщенным решением* задачи (1)–(4) назовем вектор-функцию $v\in C([0,T],S_{p_0})$, удовлетворяющую равенству

$$v - N(v) = 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть дополнительно к указанным выше условиям выполнены следующие: при некотором* $\alpha\in(0,1)$ $a^s_{jki}\in C\left([0,T],C^{1+\alpha}(\bar\Omega)\right)$, $b^s_{ki}\in C\left([0,T],C^{\alpha}(\bar\Omega)\right)$, $i,j=1,2,3$, $|s|=k$, $k=0,\dots,m$. *Тогда всякое обобщенное решение задачи* (1)–(4) *является ее решением.*

Доказательство теоремы изложено в следующем пункте.

**3**. Для доказательства теоремы нам понадобятся четыре дополнительных вспомогательных утверждения, которые сформулируем в виде лемм.

**Лемма 1.** *Для любых чисел* $\mu\in(0,1]$ *и* $q>3$ *найдется число* $\gamma=\gamma(q,\mu)\in(0,1)$, *при котором сужение проектора* $\Pi$ *на пространство вектор-функций* $C^\mu(\bar\Omega)$ *является ограниченным оператором из* $C^\mu(\bar\Omega)$ *в* $\overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_q$.

Лемма 1 сформулирована в работе [1]. Один вариант ее доказательства (полного для $\partial\Omega \in C^5$ и схема для $\partial\Omega \in C^2$) изложен в [6], другой (полное доказательство сразу для $\partial\Omega \in C^2$) — в [7].

**Лемма 2.** *Пусть* $\ell \in [0,2]$, $q > 1$, $\delta \in (0,1]$ *и* $\delta > \frac{\ell}{2}+\frac{3}{2q}$. *Тогда имеет место непрерывное вложение*

$$\overset{\circ}{S}{}_q^{2\gamma} \subset C^\ell(\bar{\Omega}).$$

Лемма 2 вытекает из интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко (см. [1], [6, § 4]), примененной к двум тройкам банаховых пространств и оператору вложения. Одна тройка — $S_q$, $\overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta}$, $\overset{\circ}{S}{}_q^{2}$; другая — $L_q(\Omega)$, $C^\ell(\bar{\Omega})$, $W_q^2(\Omega)$. При этом учитывается, что пространство $C^\ell(\bar{\Omega})$ моментно разделяет пространства $L_q(\Omega)$ и $W_q^2(\Omega)$ в отношении $\frac{\tau}{1-\tau}$, где $\tau = \frac{\ell}{2}+\frac{3}{2q}$, а пространство $\overset{\circ}{S}{}^{2\delta}$, $\delta \in (0,1)$, аппроксимационно разделяет пространства $S_q$ и $\overset{\circ}{S}{}_q^{2}$ в отношении $\frac{\delta}{1-\delta}$. Первый из этих фактов представлен известным неравенством моментов (см., например, [4, с. 327, (16.35)]), а второй устанавливается с помощью [4, лемма 14.1] с использованием аппроксимации элемента $x \in \overset{\circ}{S}{}_p^{2\delta}$ вектор-функцией $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda I + A_0)^{-1}x$, $\lambda \in (0,\infty)$ [6, с. 49].

**Лемма 3.** *Пусть* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \frac{1}{2}$, $\gamma_1 + \gamma_2 > \frac{1}{2}$. *Тогда действующие в пространстве* $S_q$, $q > 1$, *линейные операторы* $B_j = A_0^{-\gamma_1}\Pi\frac{\partial}{\partial x_j}A_0^{-\gamma_2}$, $j = 1,2,3$, *с областью определения* $D(B_j) = \overset{\circ}{S}{}_q^{2}$ *допускают расширения по непрерывности до ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве* $S_q$. *Таким образом, сохраняя за расширениями прежние обозначения, имеем при некоторой постоянной* $c > 0$ *для всех* $\varphi \in S_q$ *неравенства*

$$\left\| A_0^{-\gamma_1}\Pi\frac{\partial}{\partial x_j}A_0^{-\gamma_2}\varphi \right\|_{S_q} \leqslant c\|\varphi\|_{S_q}, \quad j = 1,2,3. \tag{16}$$

$\lhd$ Поскольку линеал $\overset{\circ}{S}{}_q^{2}$ плотен в пространстве $S_q$, то равенства (16) достаточно установить при всех $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_q^{2}$, что мы и сделаем. При этом, не нарушая общности рассуждений, будем считать $j = 1$. Согласно интегральному представлению отрицательной дробной степени оператора $A_0$ имеем [4]:

$$J\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}A_0^{-\gamma_2}\varphi = \frac{\sin\pi\gamma_2}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^\infty s^{-\gamma_2}(sI + A_0)^{-1}\varphi\,ds, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_q^{2}.$$

Покажем, что операцию дифференцирования можно внести под знак интеграла. Для этого рассмотрим последовательность

$$J_n\varphi \equiv \frac{\sin\pi\gamma_2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} s^{-\gamma_2}(sI + A_0)^{-1}\varphi\,ds, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_q^{2},\ n = 1,2,\ldots,$$

и отвечающие интегралам $J_n\varphi$ последовательности интегральных сумм Римана $\sum_{n,m}\varphi$, $m = 1,2,\ldots$ Последние (с учетом замкнутости оператора $A_0$ в $S_q$ и оценки (7) при $r = q$, $k = 0$) выберем так, что будет выполнено соотношение

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\| \sum_{n,m}\varphi - \frac{\sin\pi\gamma_2}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{-\gamma_2}(sI + A_0)^{-1}\varphi\,ds \right\|_{W_q^2} = 0, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_q^{2}. \tag{17}$$

Далее, учтем, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty s^{-\gamma_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(sI+A_0)^{-1}\varphi\,ds=\int\limits_0^\infty s^{-\gamma_2}\frac{\partial}{\partial x_1}A_0^{-1}(sI+A_0)^{-1}A_0\,\varphi\,ds$$

сходится абсолютно в $S_q$. Отсюда, в силу (17) и ограниченности оператора $\frac{\partial}{\partial x_1}$ в $W_q^1$ следует, что

$$J\varphi=\frac{\sin\pi\gamma_2}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{-\gamma_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(sI+A_0)^{-1}\varphi\,ds,$$

а потому

$$A_0^{-\gamma_1}\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}A_0^{-\gamma_2}\varphi$$

$$=\frac{\sin\pi\gamma_1\,\sin\pi\gamma_2}{\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty t^{-\gamma_1}s^{-\gamma_2}(tI+A_0)^{-1}\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}(sI+A_0)^{-1}\varphi\,ds\,dt\equiv K\varphi,\quad \varphi\in\overset{\circ}{S}{}_p^2.$$

Поскольку интеграл $K\varphi$ по квадранту $s$, $t\geqslant 0$ абсолютно сходится, то разобьем его на два: один — по треугольнику $s\leqslant t$, другой — по треугольнику $s>t$. В первом из них сделаем замену $s=tu$, во втором — $t=su$. Получим:

$$\begin{aligned}K\varphi=\frac{\sin\pi\gamma_1\,\sin\pi\gamma_2}{\pi^2}&\left\{\int\limits_0^\infty t^{1-\gamma_1-\gamma_2}\big(tI+A_0\big)^{-1}\right.\\&\times\left[\int\limits_0^1 u^{-\gamma_2}\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}\big(t\,u\,I+A_0\big)^{-1}\varphi\,du\right]dt\\&\left.+\int\limits_0^\infty s^{1-\gamma_1-\gamma_2}\left[\int\limits_0^1 u^{-\gamma_1}\big(s\,u\,I+A_0\big)^{-1}du\right]\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}\big(sI+A_0\big)^{-1}\varphi\,ds\right\}.\end{aligned}\tag{18}$$

Из представления (18) и оценок (7) при $q=r$ следует требуемое неравенство (16). ▷

**Лемма 4.** *Для всех вектор-функций $\varphi\in W_q^1$, $q>2$, справедливы равенства*

$$\Pi\frac{\partial}{\partial x_i}\,\varphi(x)=\Pi\frac{\partial}{\partial x_i}\,\Pi\,\varphi(x),\quad i=1,2,3.\tag{19}$$

◁ Согласно [6, лемма 5.2] справедливо представление

$$\Pi\varphi=\varphi-\nabla\psi,\tag{20}$$

где функция $\psi\in W_p^2(\Omega)$ — решение задачи

$$\triangle\psi=\operatorname{div}\varphi,$$
$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\varphi_n\big|_{\partial\Omega}.$$

Здесь $n$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega$. Покажем теперь, что для функции $\psi$ справедливы равенства

$$\Pi\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\psi = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{21}$$

Поскольку $\Pi$ — ортогональный в $L_2(\Omega)$ проектор на $S_2$, а множество гладких соленоидальных исчезающих на $\partial\Omega$ вектор-функций $\sigma(x)$ плотно в $S_2$ [5, лемма 5.2], то равенства (21) вытекают из очевидных тождеств

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\psi(x)\,\sigma(x)\,dx = \int\limits_\Omega \psi(x)\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_\Omega \psi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{div}\,\sigma(x)\,dx = 0,$$

$i = 1,2,3$. Тождества (19) следуют теперь из (20), (21). $\rhd$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы. Пусть вектор-функция $v(\cdot,t) \equiv v(t)$, $t \in [0,T]$, является обобщенным решением задачи (1)–(4), т. е.

$$v \in C([0,T], S_{q_0}), \tag{22}$$

и удовлетворяет уравнению (15). Докажем вначале, что при любом фиксированном $\delta \in (0,T)$

$$v \in C\left([\delta,T], \overset{\circ}{S}{}^2_{q_0}\right). \tag{23}$$

Доказательство (23) осуществим в несколько этапов. При этом в равенстве (15) вместо выражения $\psi(v,t)$ будем рассматривать лишь одно его слагаемое — $\frac{\partial}{\partial x_1}a_1(v,t)$; доказательство (23) в присутствии остальных слагаемых совершенно аналогично, но существенно более громоздко. Итак, будем исходить из соотношения

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)A_0}\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}\,a_1(v(\tau),\cdot,\tau)\,d\tau \equiv I(v,t). \tag{24}$$

При этом в силу структуры вектор-функции $a_1(v,\cdot,\tau)$, соотношения (22) и неравенства Гёльдера имеем

$$a(\cdot,\tau) \equiv a_1(v(\tau),\cdot,\tau) \in C\left([0,T], L_{q_0/m}\right). \tag{25}$$

Зафиксируем число $\gamma_0 \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{3(m-1)}{2q_0}\right)$. С помощью операции усреднения по Стеклову по вектор-функции $a_1(x,\tau)$ построим семейство гладких по $x$ вектор-функций $a^\varepsilon(x,\tau)$, $\varepsilon > 0$, таких, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|a^\varepsilon(\cdot,\tau) - a(\cdot,\tau)\|_{C_{[0,T]}(L_{q_0/m})} = 0. \tag{26}$$

В силу замкнутости в $S_{q_0}$ оператора $A_0^{\gamma_0}$ имеем

$$A_0^{\gamma_0}I_\varepsilon(v,t) \equiv A_0^{\gamma_0}e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^t A_0^{\gamma_0}\,e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\,e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\,\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}\,a^\varepsilon(\cdot,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда в силу оценок (10) и (11) находим

$$\begin{aligned} &\max_{t\in[\delta/4,T]}\left\|A_0^{\gamma_0}I(v_\varepsilon,t)\right\|_{S_{q_0}} \\ &\leqslant c\delta^{-\gamma}\|v_0\|_{S_{q_0}} + c\int\limits_0^T (t-\tau)^{-\gamma_0-\beta-\frac{1}{2}}\,d\tau\,\left\|a^\varepsilon(\cdot,\tau)\right\|_{C([0,T],\,L_{q_0/m})} \\ &\leqslant c_1 + c_2\left\|a^\varepsilon\right\|_{C\left([0,T],\,L_{q_0/m}\right)}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\beta = \frac{3(m-1)}{2q_0}$, $c, c_1, c_2 = \mathrm{const}$, не зависящие от $\varepsilon$. Из оценок (11), (12), (10) аналогичным образом следует, что

$$A_0^{\gamma_0} I_\varepsilon(v,t) \in C\big([\delta/4,T], S_{q_0}\big). \tag{28}$$

В силу (24)–(28), замкнутости оператора $A_0^{\gamma}$ и того факта, что равномерный предел $v(t)$ непрерывных вектор-функций $v_\varepsilon(t) \equiv I_\varepsilon(v,t)$ также непрерывен, получаем

$$A_0^{\gamma_0} v(t) = A_0^{\gamma_0} e^{-tA_0} v_0 + \int\limits_0^t A_0^{\gamma_0} e^{-(t-\tau)A_0} \Pi \frac{\partial}{\partial x_1}\, a_1(v(\tau),\cdot,\tau,\omega\tau)\, d\tau \in C\big([\delta/4,T], S_{q_0}\big). \tag{29}$$

Отсюда согласно лемме 2 (так как $\frac{1}{2} - \frac{3(m-1)}{2q_0} > \frac{3}{2q_0}$ при $q_0 > 3m$) следует, что при некотором $\alpha_0 > 0$ решения $v \in C\left([\delta/4,T], C^{\alpha_0}(\bar\Omega)\right)$. Поэтому вектор-функция

$$a_1(\cdot,t) \in C\left([\delta/4,T], C^{\alpha_1}(\bar\Omega)\right), \quad \alpha_1 = \min(\alpha,\alpha_0), \tag{30}$$

где $\alpha$ — то же число, что в формулировке теоремы. Следовательно, в силу леммы 1 при некотором $\gamma_1 \in (0,1)$

$$\Pi\, a(\cdot,t) \in C\left([\delta/4,T], \overset{\circ}{S}{}^{2\gamma_1}_{q_0}\right). \tag{31}$$

Исходя из соотношения (31), докажем теперь, что

$$v \in C_{[\delta/2,T]}(W^1_{q_0}). \tag{32}$$

Для этого проведем некоторые дополнительные построения. Пусть $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ — область, содержащая $\bar\Omega$, внешние нормали к границе $\partial\Omega$ которой не пересекаются в $\Omega_0$. Для вектор-функции $a(x,t)$ при каждом $t \in [0,T]$ путем зеркального отображения относительно границы $\partial\Omega$ построим продолжение[2] $\hat a(x,t)$ на область $\Omega_0$. Легко видеть, что при $t \in [\delta/4,T]$, $a(x,t) \in C^{\alpha_1}(\bar\Omega)$. Усредняя $\hat a(x,t)$ по Стеклову с усредняющим ядром $r_\varepsilon(x)$ при малых $\varepsilon > 0$, определим семейство гладких по $x$ вектор-функций

$$a^\varepsilon(x,t) = \int\limits_\Omega r_\varepsilon(x-y)\, \hat a(y,t)\, dy, \quad t \in [0,T].$$

При этом, как известно, для некоторой не зависящей от $\varepsilon$, $t$ постоянной $c > 0$ имеет место неравенство

$$\big\|a^\varepsilon(\cdot,t)\big\|_{C^{\alpha_1}(\bar\Omega)} \leqslant c\big\|a(\cdot,t)\big\|_{C^{\alpha_1}(\bar\Omega)}, \quad t \in [\delta/4,T],$$

а также справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \big\|a^\varepsilon(\cdot,t) - a(\cdot,t)\big\|_{C\left([\delta/4,T],\, C(\bar\Omega)\right)} = 0.$$

Из этих соотношений, очевидно, следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \big\|a^\varepsilon(\cdot,t) - a(\cdot,t)\big\|_{C([\delta/4,T],\, C^{\alpha_2})} = 0, \quad \alpha_2 \in (0,\alpha_1). \tag{33}$$

Имеем также

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \big\|a^\varepsilon(\cdot,t) - a(\cdot,t)\big\|_{C\left([\delta/4,T],\, L_{q_0/m}\right)} = 0. \tag{34}$$

---

[2] При $t \in [0,\delta/3]$ зеркально отображается любой представитель класса эквивалентности $a(\cdot,t)$; можно было бы $a(\cdot,t)$ продолжить нулем в область $\Omega_0 \setminus \Omega$.

Переобозначим теперь правую часть равенства (24):

$$I(v,t) = J(a,t), \tag{35}$$

и рассмотрим при $t \in \left[\frac{2}{3}\delta, T\right]$ выражения

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_i}\,J(a^\varepsilon,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\,e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^{\delta/4}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\,e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\right)\left(e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\Pi\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)a^\varepsilon\,d\tau \\ +\int\limits_{\delta/4}^{t}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\right)\left(A_0^{\gamma_2}e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\right)\left(A_0^{-\gamma_2}\Pi\tfrac{\partial}{\partial x_1}A_0^{-\gamma_1}\right)A_0^{\gamma_1}\Pi\,a^\varepsilon\,d\tau, \quad i=1,2,3.\end{gathered} \tag{36}$$

Здесь $0 < \frac{1}{2} - \gamma_1 < \gamma_2 < \frac{1}{2}$, причем $\gamma_1$ — столь малое положительное число, что в силу леммы 1 имеет место непрерывное вложение:

$$\Pi C^{\alpha_1}(\Omega) \subset \overset{\circ}{S}{}^{2\gamma_1}_{q_0}. \tag{37}$$

Отметим, что внесение операции $\frac{\partial}{\partial x_i}$ под знаки интегралов в (36) легко обосновать, используя в представлении (19) для $J(a^\varepsilon,t)$ (см. (35)) интегральные суммы Римана и замкнутость операций обобщенного дифференцирования. Отметим еще, что в представлении (36) учтена лемма 4. Из равенства (36) в силу оценок (9), (10), леммы 3 и соотношения (37) следуют неравенства

$$\begin{gathered}\max_{t\in[\delta/2,T]}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\,J(a^\varepsilon,t)\right\|_{S_{q_0}} \leqslant c\delta^{-\frac{1}{2}}\,\|v_0\|_{S_{q_0}} \\ +c\delta^{-\frac{1}{2}}\max_{t\in[0,\,\delta/4]}\int\limits_0^{\delta/4}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau\|a^\varepsilon\|_{C\left([0,\,\delta/4],\,L_{q_0/m}\right)} \\ +c\max_{t\in[\delta/2,\,T]}\int\limits_{\delta/2}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\gamma_2}\,d\tau\|a^\varepsilon\|_{C\left([\delta/4,T],\,C^{\alpha_1}(\bar\Omega)\right)} \\ \leqslant c_1 + c_2\|a^\varepsilon\|_{C\left([0,\,\delta/4],\,L_{q_0/m}\right)} + c_3\,\|a^\varepsilon\|_{C\left([\delta/4,T],\,C^{\alpha_1}(\bar\Omega)\right)}\,,\end{gathered} \tag{38}$$

где $c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ — не зависящие от $\varepsilon$ константы. Из представления (35) и оценок (9), (13), (14) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,J(a^\varepsilon,t) \in C\left([\delta/2,T],L_{q_0}\right). \tag{39}$$

В силу соотношений (24), (33)–(38) справедливо (32), а, значит,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,a(\cdot,t) \in C\left([\delta/2,T],L_{q_0/m}\right), \quad i=1,2,3. \tag{40}$$

Перепишем теперь равенство (19) при $t > \delta$ в виде

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^{\delta/2} e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0}\,\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}\,a\,d\tau + \int\limits_{\delta/2}^{t} e^{-(t-\tau)A_0}\,\Pi\frac{\partial}{\partial x_1}\,a\,d\tau.$$

Из оценок (10)–(14) и соотношений (25), (40) следует, что

$$v \in C\left(\left[\tfrac{3}{4}\delta, T\right], \overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_{q_0/m}\right),$$

где $\gamma \in (0,1)$, так что $\gamma$ может быть сколь угодно близким к единице. По лемме 2 отсюда следует существование такого числа $\ell > 1$, что

$$v \in C\left(\left[\tfrac{3}{4}\delta, T\right], C^{\ell}\right),$$

а, значит, в силу леммы 1

$$\Pi \frac{\partial}{\partial x_1} a(\cdot, t) \in C\left(\left[\tfrac{3}{4}\delta, T\right], \overset{\circ}{S}{}^{2\varepsilon}_{q_0}\right) \tag{41}$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Для завершения доказательства соотношения (23) воспользуемся представлением

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^{\frac{3}{4}\delta} e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0} e^{-\frac{t-\tau}{2}A_0} \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} a\,d\tau + \int\limits_{\frac{3}{4}\delta}^{t} e^{-(t-\tau)A_0}\,\Pi \frac{\partial}{\partial x_1} a\,d\tau, \quad t > \frac{3}{4}\delta.$$

Из него, оценок (10)–(14) и соотношений (25), (41) следует (23).

Докажем теперь, что при любых $\delta > 0$ обобщенное решение $v : [0,T] \to S_{q_0}$ дифференцируемо по $t$ при $t > 0$ и при этом

$$\frac{\partial v}{\partial t} \in C_{[\delta,T]}(S_{q_0}). \tag{42}$$

Будем исходить из соотношения (23), которое ввиду произвольности $\delta > 0$ перепишем в виде

$$v \in C\left([\delta/2, T], \overset{\circ}{S}{}^{2}_{q_0}\right). \tag{43}$$

Отсюда на основании эквивалентности норм в пространствах $\overset{\circ}{S}{}^{2}_{q_0}$ и $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{q_0}$ (в силу неравенства коэрцитивности [5]) и известной теоремы о непрерывности вложения $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{q_0} \subset C^{1+\alpha_2}$, $1 < \alpha_2 < \frac{3}{q_0}$, следует, что

$$\psi_1(v(t), t) \in C\left([\delta/2, T], C^{\alpha_3}\right), \quad \alpha_3 = \min(\alpha_2, \alpha). \tag{44}$$

Отсюда по лемме 1 следует существование такого $\gamma_3 > 0$, что

$$\psi(v(t), t) \equiv \Pi\psi_1(v(t), t) \in C\left([\delta/2, T], \overset{\circ}{S}{}^{2\gamma_3}_{q_0}\right). \tag{45}$$

Перепишем теперь равенство (24) при $t > \delta$ в виде

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int\limits_0^{\delta/2} e^{-A_0(t-\tau)}\psi(v(\tau), \tau)\,d\tau + \int\limits_{\delta/2}^{t} e^{-A_0(t-\tau)}\psi(v(\tau), \tau)\,d\tau.$$

Последнее, на основании равенств (4), (5), соотношения (45) и неравенств (11), (12), непрерывно дифференцируемо, так что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0 e^{-tA_0} v_0 + \int\limits_0^{\delta/2} A_0 e^{-A_0(t-\tau)} \psi(v(\tau),\tau)\,d\tau$$
$$+ \int\limits_{\delta/2}^{t} A_0^{1-\gamma_3} e^{-A_0(t-\tau)} A_0^{\gamma_3} \psi(v(\tau),\tau)\,d\tau + \psi(v(\tau),\tau) \in C([\delta,T],S_{q_0}). \tag{46}$$

Из соотношений (22), (43) и (46) легко следует, что вектор-функция $v(x,t)$ является решением задачи (1)–(4) в смысле данного в начале п. 2 определения. (При этом $\nabla P$ выражается через $v$ посредством соотношения (1).) Теорема полностью доказана. ▷

## Литература

1. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб.—1972.—Т. 87, № 2.—С. 236–253.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.—288 с.
3. *Левенштам В. Б.* Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 5.—С. 1103–1116.
4. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—499 с.
5. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
6. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1989.—112 с.
7. *Левенштам В. Б.* Одно свойство проектора П гидродинамики // Комплексный анализ, дифференциальные и интегральные уравнения.—Элиста, 1990.—С. 89–96.

*Статья поступила 14 сентября 2009 г.*

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
*профессор кафедры алгебры и дискретной математики*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
*ведущий научный сотрудник лаб. математической физики*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `vleven@math.rsu.ru`

# ON CORRELATION OF TWO SOLUTION CLASSES OF NAVIER — STOKES EQUATION

Levenshtam V. B.

We consider an initial boundary value problem for Navier — Stokes equation with mass power polinomial depend on unknown (velocity). We introduce for it the definitions of solution and generalized solution and we derive the conditions, under with a generalized solution is a solution.

**Key words:** Navier — Stokes equation, solution, generalized solution.