*Владикавказский математический журнал*
*2010, Том 12, Выпуск 3, С. 71–82*

*УДК* **517.95**

# ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ПОЛУГРУППЫ ОЗЕЕНА В $\mathbb{R}^n$ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА[1]

**Л. И. Сазонов**

Исследуется вопрос об условиях, при которых возмущенная полугруппа операторов Озеена в $\mathbb{R}^n$ допускает степенные оценки, аналогичные оценкам невозмущенной полугруппы Озеена. Эти оценки используются для исследования устойчивости стационарных решений системы Навье — Стокса в $\mathbb{R}^n$.

**Ключевые слова:** Система Навье — Стокса, полугруппа Озеена, устойчивость.

## 1. Введение

Пусть $v$ — стационарное решение системы Навье — Стокса в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u - (u, \nabla)u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div}\ u = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что поле $v$ имеет вид $v = u_\infty e_1 + w$, где $u_\infty = \mathrm{const}$, а $w$ в определенном смысле стремится к нулю на бесконечности (это условие в дальнейшем будет уточнено).

Осуществляя замену $u := u + v$, приходим к уравнению для возмущений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u - u_\infty \partial_1 u - (w, \nabla)u - (u, \nabla)w - (u, \nabla)u - \nabla p, \\ \operatorname{div}\ u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) будем называть *возмущенной системой Озеена.* Обозначим через в $L_p^n(\mathbb{R}^n)$ пространство $n$-мерных векторных полей с координатами из $L_p(\mathbb{R}^n)$ и пусть $S_p = S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — подпространство в $L_p^n(\mathbb{R}^n)$, являющееся замыканием множества всех гладких финитных соленоидальных полей. Применяя к системе (2) гидродинамический проектор $\Pi : L_p^n(\mathbb{R}^n) \to S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$, сведем возмущенную систему Озеена к ОДУ в пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu + Ku, \tag{3}$$

где $A$, $B$, $K$ — операторы вида:

$$Au = \Pi(\triangle u - u_\infty \partial_1 u), \quad Bu = -\Pi\big((w, \nabla)u + (u, \nabla)w\big), \quad Ku = -\Pi\big((u, \nabla)u\big). \tag{4}$$



[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы, грант № 211/6095.

Далее уравнение (3) будем исследовать методами теории полугрупп, следуя методике, развитой В. И. Юдовичем в [1] для исследования гидродинамических задач в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^3$. Полугрупповой подход для исследования эволюционных уравнений развивался в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, П. Е. Соболевского, Т. Като, В. И. Юдовича и многих других авторов. В частности, отметим работу Т. Като [2], в которой для уравнения (3) при $B = 0$, $u_\infty = 0$ установлены теоремы существования локальных и глобальных при малых начальных данных решений в пространстве $S_n(\mathbb{R}^n)$ и их асимптотика при $t \to \infty$. Сошлемся также на работу [3], в которой установлена одна абстрактная теорема об устойчивости и доказана асимптотическая устойчивость нулевого равновесия системы Навье — Стокса в пространстве $\mathbb{R}^3$. Следует отметить, что полугрупповой подход к системе Навье — Стокса активно развивается в последние десятилетия и в его рамках исследованы вопросы глобальной разрешимости в различных функциональных пространствах (правда, в основном при условии определенной малости начальной скорости и поля внешних сил). По этому поводу смотрите, например, [4] и имеющуюся там библиографию.

В случае $B = 0$ ($w = 0$) главная линейная часть уравнения (3) представлена оператором Озеена (Стокса при $u_\infty = 0$) $A$, который в каждом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ с областью определения $D(A) = W_p^2(\mathbb{R}^n) \cap S_p(\mathbb{R}^n)$ порождает аналитическую полугруппу Озеена $T(t)$, совпадающую на соленоидальных полях с полугруппой теплопроводности с переносом. Отсюда непосредственно следует, что для полугруппы Озеена справедливы оценки

$$\left\|\partial^\alpha T(t)\right\|_{p\to q} \leqslant c_{pq}^\alpha t^{-|\alpha|/2-(n/2)(1/p-1/q)}, \tag{5}$$

где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

Для применения полугруппового метода к возмущенной системе Озеена (3) необходимо выяснить при каких условиях возмущенный оператор Озеена $\tilde{A} = A + B$ порождает аналитическую полугруппу, которая удовлетворяет оценкам вида (5). Эти вопросы исследуются в § 2 с использованием результатов работы [5], в которой получены оценки возмущенной полугруппы Озеена во внешней области пространства $\mathbb{R}^3$. Результаты об устойчивости и неустойчивости стационарных решений содержатся в § 3 и § 4.

## 2. Возмущенная полугруппа Озеена

Как уже отмечалось во введении, оператор Озеена

$$A = \Pi(\triangle - u_\infty \partial_1)$$

с областью определения $D(A) = S_p(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n)$ порождает в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ аналитическую полугруппу $T(t)$, для которой справедливы оценки (5). В случае всего пространства этот факт является простым следствием из оценок полугруппы теплопроводности. Однако для других неограниченных областей получение таких оценок связано с определенными техническими трудностями. В частности, для внешних областей пространства $\mathbb{R}^3$ при фиксированном значении $u_\infty \neq 0$ оценки установлены в [6] методом гидродинамических потенциалов, в [7] они получены иными методами, причем доказана их равномерность по параметру $u_\infty \in (0, r)$, многомерный случай рассмотрен в [8]. Следует также отметить, что для внешних областей происходит сужение области изменения параметров $p$ и $q$.

Вместе с оператором Озеена $A$ рассмотрим возмущенный оператор Озеена $\tilde{A} = A + B$, где $Bu = -\Pi((u, \nabla)w + (w, \nabla)u)$.

**Лемма 1.** *Пусть* $w$ *— соленоидальное поле, причем* $w, \partial_j w \in L_\infty^n(\mathbb{R}^n)$*. Тогда возмущенный оператор* $\tilde{A}$ *с областью определения* $D(\tilde{A}) = D(A)$ *порождает в любом пространстве* $S_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ *аналитическую полугруппу* $\tilde{T}(t)$.

$\lhd$ Доказательство по существу повторяет доказательство из [5] и опускается. $\rhd$

Пусть $u_0$ — финитное соленоидальное поле в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u(t) = \tilde{T}(t)u_0$ — решение линейной возмущенной системы Озеена, т. е. системы (3), в которой следует положить $K = 0$. Для получения оценок полугруппы $\tilde{T}(t)$ достаточно оценить $u(t)$ для указанных начальных данных $u_0$. Заметим, что $u(t)$ является решением интегрального уравнения

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)\, ds. \tag{6}$$

Рассмотрим оператор-функцию $T(t)B$. Ввиду соленоидальности поля $w$ ее можно представить в виде

$$T(t)Bu = -T(t)\Pi\left[(\nabla, u)\, w + (\nabla, w)\, u\right].$$

Тогда из неравенств (5) вытекают оценки

$$\big\|T(t)B\big\|_{p\to q} \leqslant c_{p,q} t^{-1/2-(n/2)(1/p+1/\varrho-1/q)} \|w\|_\varrho, \tag{7}$$

причем должны выполняться условия

$$1/q \leqslant 1/p + 1/\varrho \leqslant 1, \quad 1 \leqslant p, q \leqslant \infty,$$

и если $1/p + 1/\varrho = 1$, то $q \neq 1, \infty$.

Пусть $q > n/(n-1)$ и дополнительно к условиям леммы 1 $w \in L_\varrho^n(\mathbb{R}^n)$ для всех $\varrho \in [\varrho_1, \infty]$, где $\varrho_1 < n$. Тогда в силу (7) для оператор-функции $T(t)B$ справедлива оценка

$$\|T(t)B\|_{q\to q} \leqslant c_q t^{-1/2}(1+t)^{-\gamma},$$

где $\gamma = \min(n/(2\varrho_1),\, n/2(1-1/q))$, причем $\gamma + 1/2 > 1$ $(q > n/(n-1)!)$.

Для оператор-функции $T(t)B$ определим ее преобразование Фурье

$$\mathscr{F}_z[T(t)B] = \int_0^{+\infty} T(t)Be^{itz} dt$$

при $z \in \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Предположим, что оператор $I - \mathscr{F}_z[T(t)B]$ для любого $z$ с $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ обратим в пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$ $(q > n/(n-1))$. Тогда, как установлено в [5], существует оператор-функция $A(t) \in \operatorname{End}(S_q(\mathbb{R}^n))$, удовлетворяющая оценкам

$$\big\|A(t)\big\|_{q\to q} \leqslant c_{\alpha,\beta} t^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} \tag{8}$$

для любого $\alpha \in (1/2, 1)$ с $\alpha + \beta = 1/2 + \gamma > 1$, такая, что решение уравнения (6) представляется в виде

$$u(t) = T(t)u_0 - \int_0^t A(t-\tau)T(\tau)u_0\, d\tau. \tag{9}$$

Далее, из представления (9) и неравенств (8) вытекает оценка

$$\|u(t)\|_q \leqslant \|T(t)u_0\|_q + c_q \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha}(1+t-\tau)^{-\beta}\tau^{-\gamma}\,d\tau \sup_{\tau<t}\|\tau^\gamma T(\tau)u_0\|_q, \tag{10}$$

где $0<\gamma<1$. Анализ неравенства (10), выполненный в [5], приводит к неравенству

$$\big\|\tilde T(t)u_0\big\|_q \leqslant c_q t^{-\gamma}\sup_t \big\|t^\gamma T(t)u_0\big\|_q, \quad n/(n-1)<q\leqslant\infty,\ 0<\gamma<1. \tag{11}$$

Полагая $u_0=\Pi\partial^\theta v_0$ и используя оценки невозмущенной полугруппы (5), получаем

$$\big\|\tilde T(t)\Pi\partial^\theta\big\|_{p\to q} \leqslant c_{pq}t^{-|\theta|/2-(n/2)(1/p-1/q)} \tag{12}$$

при выполнении следующих условий:

$$|\theta|\leqslant 1, \quad |\theta|/2+n/2(1/p-1/q)<1, \quad q>n/(n-1), \quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty.$$

Некоторые ограничения на $p$, $q$ можно ослабить. Из полугруппового свойства следует, что неравенство (12) выполняется, если $q>n/(n-1)$ и $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$.

Возвращаясь к интегральному уравнению, определяющему $u(t)=\tilde T(t)\Pi\partial^\theta v_0$, имеем при $1<q\leqslant n/(n-1)$

$$\big\|u(t)-T(t)\Pi\partial^\theta v_0\big\|_q \leqslant c\int\limits_0^t \big\|T(t-\tau)B\big\|_{r\to q}\|u(\tau)\|_r\,d\tau,$$

где $r>n/(n-1)$.

Для интеграла с учетом (12) и (7) справедлива оценка

$$\int\limits_0^t \big\|T(t-\tau)B\big\|_{r\to q}\|u(\tau)\|_r\,d\tau \leqslant ct^{1/2-|\theta|/2-n/(2\varrho)-(n/2)(1/p-1/q)},$$

причем должны выполняться условия

$$1/2+n/2\big(1/r+1/\varrho-1/q\big)<1, \quad |\theta|/2+n/2\big(1/p-1/r\big)<1,$$

$$1/q\leqslant 1/r+1/\varrho\leqslant 1, \quad r>n/(n-1), \quad p\leqslant q.$$

Простой анализ предыдущих неравенств приводит к следующему результату.

**Теорема 1.** *Предположим, что оператор $I-\mathscr{F}_z[T(t)B]$ для любого $z\in\{z;\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ обратим в пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$ при любом $q>n/(n-1)$. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки*

$$\big\|\tilde T(t)\Pi\partial^\theta\big\|_{p\to q} \leqslant c_{pq}t^{-|\theta|/2-(n/2)(1/p-1/q)} \tag{13}$$

*при выполнении следующих условий $|\theta|\leqslant 1$, $1\leqslant p\leqslant q<\infty$, $q>1$ при $|\theta|=0$, $1<p\leqslant q<\infty$ при $|\theta|=1$.*

Условия теоремы можно сформулировать в терминах возмущенного оператора Озеена. Опуская выкладки, отметим, что при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ справедлива формула

$$\mathscr{F}_z[T(t)B] = -R_{-iz}(A)B,$$

где $R_{-iz}(A)$ — резольвента оператора Озеена. В свою очередь, резольвенту $R_\lambda(A)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ на финитных соленоидальных гладких полях можно представить в виде

$$R_\lambda(A)u = -\mathscr{F}^{-1}\frac{1}{|\xi|^2 + iu_\infty\xi_1 + \lambda}\,\mathscr{F}u, \tag{14}$$

где $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье.

Здесь следует сделать одну оговорку. Точка $\lambda = 0$ является точкой спектра оператора Озеена, однако оператор, определяемый правой частью (14) при $\lambda = 0$ можно рассматривать как неограниченный оператор и для него удобно сохранить обозначение $R_0(A)$. Применение теорем Михлина и Лизоркина о мультипликаторах преобразования Фурье (см., например, [9]) приводит к следующим утверждениям:

*при* $\lambda \neq 0,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ *оператор* $R_\lambda(A)$ *является ограниченным оператором из* $S_p(\mathbb{R}^n)$ *в пространство Соболева* $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $p \in (1, \infty)$;

*при* $\lambda = 0$ *оператор* $\partial^\theta R_0(A)$ *является ограниченным оператором из* $S_p(\mathbb{R}^n)$ *в пространство* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *при выполнении условий*

$$|\theta| \leqslant 2, \quad 1 < p \leqslant q < \infty, \quad \frac{2 - |\theta|}{n+1} \leqslant 1/p - 1/q \leqslant \frac{2 - |\theta|}{n}.$$

Далее, ввиду компактности вложения $W_p^1(D) \subset L_p(D)$ для гладких ограниченных областей оператор $R_\lambda(A)B$ является вполне непрерывным оператором из $S_p(\mathbb{R}^n)$ в $S_p(\mathbb{R}^n)$ при $(n+1)/n < p < \infty$, если $\lambda = 0$, $1 < p < \infty$, если $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Теперь из теории Фредгольма следует, что оператор $I - \mathscr{F}_z[T(t)B]$ для любого $z \in \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ обратим в пространстве $S_q(\Omega)$ при любом $q > n/(n-1)$ тогда и только тогда, когда ядро $\operatorname{Ker}_q(I + R_\lambda(A)B)$ оператора $I + R_\lambda(A)B$, действующего в пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$, тривиально для всех $q > n/(n-1)$ и $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Кроме того, из сглаживающих свойств операторов $R_\lambda(A)B$ вытекает, что $\operatorname{Ker}_q(I + R_\lambda(A)B) = \operatorname{Ker}_p(I + R_\lambda(A)B)$, $\operatorname{Ker}_q(I + R_\lambda(A)B) = \operatorname{Ker}_q(A + B - \lambda I)$ при $p, q > (n+1)/n$. Поэтому, говоря далее о собственных числах возмущенного оператора Озеена, мы будем иметь в виду его собственные числа, отвечающие собственным функциям из пространства $S_q(\mathbb{R}^n)$ при любом фиксированном $q > (n{+}1)/n$. Из изложенного следует, что множество собственных чисел из полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ не зависит от $q$.

Таким образом, установлена

**Теорема 2.** *Пусть* $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$ *и возмущенный оператор Озеена не имеет собственных чисел в полуплоскости* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$. *Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки, сформулированные в теореме* 1.

Для получения степенных оценок для операторов $\partial^\theta \tilde{T}(t)$ перейдем к сопряженным операторам $\tilde{T}^*(t)\Pi\partial^\theta$. При этом следует иметь в виду, что у оператора $\tilde{A}^*$ нарушается дивергентная структура. Это приводит к некоторым изменениям в оценках.

Заметим, что сопряженный оператор имеет вид $\tilde{A}^* = A^* + B^*$, где $A^* = \Pi(\Delta + u_\infty\partial_1)$, $B^*u = \Pi((\nabla, w)u + \sum_{j=1}^n (\nabla w_j)u_j)$. Оператор $A^*$ по существу совпадает с оператором $A$, если заменить $u_\infty$ на $-u_\infty$. Поэтому сопряженная полугруппа $T^*(t)$ удовлетворяет тем же оценкам, что и $T(t)$. Далее аналогично предыдущему $u(t) = \tilde{T}^*(t)u_0$ определяется из уравнения

$$u(t) = T^*(t)u_0 + \int\limits_0^t T^*(t-s)B^*u(s)\,ds.$$

Для оператор-функции $T^*(t)B^*$ справедливо неравенство

$$\left\|T^*(t)B^*\right\|_{p\to q} \leqslant c_{p,q}(t^{-1/2-(n/2)(1/p+1/\varrho-1/q)}\|w\|_\varrho + t^{-(n/2)(1/p+1/\sigma-1/q)}\|\nabla w\|_\sigma),$$

причем должны выполняться условия $1/q \leqslant 1/p + 1/\varrho < 1$, $1/q \leqslant 1/p + 1/\sigma < 1$, $1 < p$, $q < \infty$. Анализ этих условий показывает, что нужная оценка

$$\left\|T^*(t)B^*\right\|_{q\to q} \leqslant c_q t^{-1/2}(1+t)^{-\gamma}, \quad 1/2+\gamma > 1$$

выполняется при $q > n/(n-2)$, если дополнительно к условию $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$ потребуем, чтобы $\nabla w \in L_{\sigma_1} \cap L_\infty$, $\sigma_1 < n/2$. Далее мы должны потребовать отсутствия у оператора $\tilde{A}^*$ собственных значений в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$, отвечающих собственным векторам из пространств $S_q(\mathbb{R}^n)$ для всех $q > n/(n-2)$ (а на самом деле достаточно для одного из таких $q$). Однако это условие не является новым, а следует из отсутствия собственных значений у возмущенного оператора Озеена. Теперь дословно повторяя доказательство для полугруппы $\tilde{T}(t)$, приходим к выводу, что при выполнении условий теоремы 2 справедливы оценки

$$\left\|\tilde{T}^*(t)\Pi\partial^\theta\right\|_{p\to q} \leqslant c_{pq} t^{-|\theta|/2-n/2(1/p-1/q)}, \tag{15}$$

если только $n/(n-1) < p \leqslant q < \infty$. Отсюда из соображений двойственности вытекает

**Теорема 3.** *Пусть $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$, $\nabla w \in L_{\sigma_1} \cap L_\infty$, $\sigma_1 < n/2$ и выполняются предположения теоремы 2. Тогда*

$$\left\|\nabla\tilde{T}(t)\right\|_{p\to q} \leqslant c_{pq} t^{-1/2-(n/2)(1/p-1/q)}, \tag{16}$$

*если только $1 < p \leqslant q < n$.*

## 3. Теоремы об устойчивости

**Определения устойчивости.** Предварительно сформулируем используемые ниже определения устойчивости из [1]. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $X$

$$\frac{dv}{dt} = F(v,t). \tag{17}$$

Пусть $v_0(t)$ — его решение, определенное на $[0,\infty)$. Устойчивость основного решения $v_0(t)$ отождествляется с устойчивостью равновесия $u_0 = 0$ для уравнения возмущений

$$\frac{du}{dt} = F(v_0+u,t) - F(v_0,t).$$

Пусть для этого уравнения определен, по крайней мере, в некоторой окрестности нуля пространства $X$ эволюционный оператор $U^t$, дающий решение $u(t) = U^t u_0$, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = u_0$.

Равновесие $u_0 = 0$ называется *устойчивым* $(X,U)$, если $U^t$ определяет отображение некоторой окрестности нуля в $X$ в некоторое банахово пространство $U$ вектор-функций на $[0,\infty)$, непрерывное в точке $u_0 = 0$.

В частности, устойчивость $(X,C_X)$ называется *устойчивостью по Ляпунову*, а устойчивость $(X,C_X^0)$ — *асимптотической устойчивостью.* (В этих обозначениях $C_X =$

$C([0,\infty],X)$ — пространство непрерывных на $[0,\infty)$ вектор-функций со значениями в $X$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C_X} = \sup_{0<t<\infty} \|u(t)\|_X,$$

$C_X^0$ — его подпространство вектор-функций с условием $\|u(t)\|_X \to 0$ при $t \to \infty$.)

Если $C_{X,\sigma}$ — подпространство в $C_X$ с нормой

$$\|u\|_{C_{X,\sigma}} = \sup \|e^{\sigma t} u(t)\|_X, \quad \sigma > 0,$$

то устойчивость $(X, C_{X,\sigma})$ называется *экспоненциальной устойчивостью* в $X$.

Важно отметить, что решение при одном выборе нормы может быть устойчивым, а при другом — неустойчивым.

**Абстрактная теорема об устойчивости.** Рассмотрим в банаховом пространстве $X$ нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au + Ku \tag{18}$$

при следующих предположениях.

I. Пусть $Y$ — банахово пространство, имеющее с пространством $X$ общее плотное множество, и $A$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ в $X$ и $Y$, удовлетворяющей условию

$$\left\|T(t)\right\|_{X\to X} \leqslant ce^{-\sigma t} \quad (\sigma \geqslant 0). \tag{19}$$

II. Нелинейный оператор $Ku$ имеет вид $Ku = DK_0(D_1u, ...D_mu)$, $m \geqslant 2$, где $K_0 : Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m \to Y$ — полилинейный ограниченный оператор, так что

$$\left\|K_0(u_1, \ldots, u_m)\right\|_Y \leqslant c \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|_{Y_j}. \tag{20}$$

III. а) Замкнутый оператор $D : Y \to X$ имеет дробную степень $\gamma_0$ $(0 < \gamma_0 < 1)$ относительно оператора $A$ справа в том смысле, что

$$\left\|T(t)D\right\|_{Y\to X} \leqslant ct^{-\gamma_0} e^{-\sigma t}. \tag{21}$$

б) Замкнутый оператор $D_j : X \to Y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ имеет дробную степень $\gamma_j$ $(0 < \gamma_j < 1)$ :

$$\left\|D_j T(t)\right\|_{X\to Y_j} \leqslant ct^{-\gamma_j} e^{-\sigma t}, \tag{22}$$

$$\gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1 - \gamma_0, \tag{23}$$

причем пересечение областей определения операторов $D_j$ не пусто.

в) Оператор-функции $t \to t^{\gamma_j} D_j T(t)$ со значениями в $\mathrm{Hom}(X, Y_j)$ сильно непрерывны и сильно сходятся к нулю при $t \to 0$.

Небольшая модификация доказательства из [3] приводит к следующему результату.

**Теорема 4.** *При выполнении условий* I–III нулевое решение уравнения (18) асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве $X$, причем при $\sigma > 0$ устойчивость экспоненциальная.

Более точно, устойчивость в теореме 4 понимается как устойчивость $(X, Z)$, где $Z$ — банахово пространство всех вектор-функций $u : [0,\infty) \to X$, для которых конечна норма

$$\|u\|_Z = \big\|e^{\sigma t} u(t)\big\|_{C([0,\infty),X)} + \sum_{j=0}^{m} \big\|t^{\gamma_j} e^{\sigma t} D_j u(t)\big\|_{C_0([0,\infty),Y_j)},$$

где $C_0([0,\infty), Y_j) = \{v \in C([0,\infty), Y_j),\ v(0) = 0\}$.

Решение задачи Коши для уравнения (18) с начальным условием $u|_{t=0} = a$ понимается в обобщенном смысле как решение интегрального уравнения

$$u(t) = T(t)a + \int_0^t T(t-s)Ku(s)\,ds, \tag{24}$$

а доказательство теоремы получается при исследовании его разрешимости в пространстве $Z$.

Учитывая оценки (19)–(22), получим для оператора $\mathscr{B}$, определяемого правой частью уравнения (24), неравенства

$$\big\|\mathscr{B}u\big\|_Z \leqslant c\big(\|a\|_X + \|u\|_Z^m\big), \tag{25}$$

$$\big\|\mathscr{B}u_1 - \mathscr{B}u_2\big\|_Z \leqslant c\big\|u_1 - u_2\big\|_Z \sup_{i=1,2} \|u_i\|_Z^{m-1}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) вытекает существование чисел $\delta > 0$ и $R > 0$ таких, что при $\|a\|_X \leqslant \delta$ оператор $\mathscr{B}$ является сжимающим оператором в шаре $B(0, R)$ пространства $Z$. Следовательно, уравнение (24) имеет в этом шаре единственное решение $u$, причем справедлива оценка $\|u\|_Z \leqslant 2c\|a\|_X$. На самом деле имеет место единственность во всем пространстве $Z$. Поэтому нулевое решение уравнения (18) устойчиво $(X, Z)$. Тем самым теорема доказана при $\sigma > 0$.

Если $\sigma = 0$, то устойчивость $(X, Z)$ влечет лишь устойчивость по Ляпунову в пространстве $X$. Для доказательства асимптотической устойчивости устанавливается принадлежность последовательных приближений $u_1(t) = T(t)a,\ u_n(t) = \mathscr{B}u_{n-1}(t)$ пространству $C^0([0,\infty), X)$.

**Теорема об устойчивости стационарного решения.** Пусть $v = w + u_\infty e_1$ — стационарное решение системы (1). Для исследования его устойчивости применим теорему 4 к уравнению (3), которое представим в форме

$$\frac{du}{dt} = \tilde{A}u + Ku, \tag{27}$$

где $\tilde{A}$ — возмущенный оператор Озеена, $Ku = -\Pi\{(u,\nabla)u\}$. Предположим, что поле $v$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена выполняются оценки (13). Будем исследовать устойчивость решения $u = 0$ уравнения (27) в одном из пространств $S_p(\mathbb{R}^n)$, т. е. полагаем $X = S_p(\mathbb{R}^n)$. Учитывая, что для $a$ из $S_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, выполняется оценка

$$\|\tilde{T}(t)a\|_{p\to q} \leqslant c_{pq} t^{-(n/2)(1/p-1/q)} \|a\|_p,$$

получаем, что

$$t^{(n/2)(1/p-1/q)} \tilde{T}(t)a \in C_0\big([0,\infty), S_q(\mathbb{R}^n)\big). \tag{28}$$

Нелинейный член системы Навье — Стокса ввиду соленоидальности поля $u$ допускает представление $Ku = -\Pi\{(\nabla, u)u\}$. Поэтому пространства $Y_j$ будем выбирать в виде $Y_1 = Y_2 = S_r(\mathbb{R}^n)$ $(r > p)$. Тогда в качестве пространства $Y$ следует выбрать $S_{r/2}(\mathbb{R}^n)$ $(r > 2)$. Из оценок (13) следует, что $\gamma_0 = 1/2 + n/2(2/r - 1/p)$, причем должно быть $1/p \leqslant 2/r < 1$, и $\gamma_1 = \gamma_2 = n/2(1/p - 1/r)$. Тогда из соотношения $\gamma_0 + 2\gamma_1 = 1$ вытекает, что $p = n$, и тогда должно быть $n < r \leqslant 2n$. Выберем в качестве $Z$ пространство всех вектор-функций $u : [0, \infty) \to S_n(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_Z = \|u(t)\|_{C([0,\infty),X)} + \|t^{\gamma_1} u(t)\|_{C_0([0,\infty),Y_1)},$$

где $X = S_n(\mathbb{R}^n)$, $Y_1 = S_r(\mathbb{R}^n)$, причем $r$ — любое фиксированное число, принадлежащее $(n, 2n]$. Учитывая зависимость от $r$ будем использовать обозначение $Z_r$. В качестве следствия теорем 2 и 4 устанавливаем следующий результат.

**Теорема 5.** *Пусть для стационарного решения* $w + u_\infty e_1$ *выполняются условия:* $w$, $\partial_j w \in L^n_\infty(\mathbb{R}^n)$, $w \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *при некотором* $p < n$; *возмущенный оператор Озеена не имеет в пространстве* $S_n(\mathbb{R}^n)$ *собственных векторов, отвечающих собственным значениям из правой полуплоскости* $Re\lambda \geqslant 0$. *Тогда решение* $w + u_\infty e_1$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве* $S_n(\mathbb{R}^n)$. *(Более точно, устойчиво* $(X, Z_r)$.*)*

Следующие рассуждения уточняют поведение возмущений в случае, когда $t \to \infty$.

Пусть $u(t)$ — решение интегрального уравнения для возмущений

$$u(t) = \tilde{T}(t)a + \int_0^t \tilde{T}(t-s)(Ku)(s)\,ds \tag{29}$$

с начальным условием $a \in S_n(\mathbb{R}^n)$, принадлежащее пространству $Z_r$ с некоторым $r \in (n, 2n]$ и $w(t) = u(t) - T(t)a$. Существование и единственность таких решений при достаточно малой норме $\|a\|_n$ по существу устанавливается при доказательстве теоремы 5.

Из неравенства

$$\|u(t)\|_p \leqslant \|u(t)\|_n^\theta \|u(t)\|_r^{1-\theta},$$

где $n < p < r$, $\theta = (1/p - 1/r)/(1/n - 1/r)$, получаем, что $u(t) \in S_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [n, r]$ и

$$\|u(t)\|_p \leqslant c_p t^{-(n/2)(1/n - 1/p)}.$$

Учитывая это неравенство, устанавливаем, что

$$\|w(t)\|_q \leqslant c_q \int_0^t (t-\tau)^{-1/2-(n/2)(2/s-1/q)} \tau^{-n(1/n-1/s)}\,d\tau \leqslant c_q t^{-(n/2)(1/n-1/q)}$$

при выполнении условий $s \in (n, r]$, $0 \leqslant 2/s - 1/q < 1/n$.

Отсюда следует, что справедлива следующая

**Теорема 6.** *Пусть для стационарного решения задачи обтекания выполнены условия теоремы 2. Тогда при достаточно малой норме* $\|a\|_n$ *интегральное уравнение* (29) *имеет единственное решение* $u(t)$, *которое принадлежит всем пространствам* $S_q(\mathbb{R}^n)$ *при всех* $q \in [n, \infty)$ *и выполняется неравенство*

$$\|u(t)\|_q \leqslant c_q t^{-(n/2)(1/n-1/q)}.$$

## 4. Теорема о неустойчивости

**Теорема 7.** *Пусть возмущенный оператор Озеена, для которого $w \in L_s^n \cap L_\infty^n$, $\partial_j w \in L_\infty^n$, имеет собственный вектор в некотором пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$ $(1 < q < \infty)$, отвечающий собственному значению $\lambda$ с положительной вещественной частью $\operatorname{Re}\lambda = a > 0$. Тогда стационарное решение $v = w + u_\infty e_1$ неустойчиво в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$.*

$\lhd$ При указанных предположениях собственный вектор $\phi$ принадлежит всем пространствам $S_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$. Будем считать, что $\lambda$ — собственное значение с максимальной вещественной частью $\operatorname{Re}\lambda = a > 0$. В этом случае для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки

$$\left\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\alpha\right\|_{p\to q} \leqslant c_{pq\varepsilon} e^{(a+\varepsilon)t} t^{-|\alpha|/2-(n/2)(1/p-1/q)}, \tag{30}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число, $|\alpha| = 0, 1$, $1 < p \leqslant q < \infty$. Рассмотрим сначала случай $p > n$. Выберем начальное поле в виде $u_0 = \varepsilon\phi$, $\|\phi\|_p = 1$. Тогда

$$\tilde{T}(t)u_0 = \varepsilon\phi e^{\lambda t}$$

и интегральное уравнение для возмущений имеет вид

$$u(t) = \varepsilon\phi e^{\lambda t} + \int_0^t \tilde{T}(t-s)(Ku)(s)\,ds.$$

Теорема Банаха о неподвижной точке позволяет при достаточно малом $\varepsilon > 0$ установить существование решения $u$ в пространстве $C([0,\xi], S_p(\mathbb{R}^n))$. Пусть $[0,\xi)$ $(\xi = \xi_{\varepsilon,p})$ — максимальный интервал существования решения $u$. Тогда либо $\xi = \infty$, либо

$$\sup_{t<\xi} \|u(t)\|_p = \infty.$$

Пусть $[0, b]$ — максимальный отрезок, на котором выполняется неравенство

$$\|u(t)\|_p \leqslant \varepsilon R e^{at},$$

где $R$ — некоторое число из интервала $(1, 2)$.

Для вектор-функции

$$u_2(t) = \int_0^t \tilde{T}(t-s)(Ku)(s)\,ds$$

на $[0, b]$ справедлива оценка

$$\|u_2(t)\|_p \leqslant \int_0^t c_\eta e^{(a+\eta)(t-s)}(t-s)^{-\gamma}\varepsilon^2 R^2 e^{2as}\,ds,$$

где $\eta > 0$, $\gamma = 1/2 + n/(2p) < 1$. Осуществляя в интеграле замену $t - s = \tau$ и выбирая $\eta = a/2$, получаем, что

$$\|u_2(t)\|_p \leqslant c_{a/2}\varepsilon^2 R^2 e^{2at} \int_0^t e^{-a/2\tau}\tau^{-\gamma}\,d\tau \leqslant c\varepsilon^2 R^2 e^{2at},$$

где $c = c_{a/2}\Gamma(1-\gamma)(a/2)^{-1+\gamma}$. С учетом установленного неравенства получаем

$$\|u(t)\|_p \leqslant \varepsilon e^{at}(1 + c\varepsilon R^2 e^{at}).$$

При достаточно малых $\varepsilon$ существует такое $b_1$, что

$$(1 + c\varepsilon R^2 e^{ab_1}) = R.$$

Ясно, что $b_1 \leqslant b$. Но тогда

$$\|u(b_1)\|_p \geqslant \varepsilon e^{ab_1} - c\varepsilon^2 R^2 e^{2ab_1} = \frac{(R-1)(2-R)}{cR^2}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ полученное неравенство означает неустойчивость в пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что рассматриваемое решение принадлежит всем пространствам $S_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$. Действительно, если $u \in C([0,b], S_p(\mathbb{R}^n))$ при некотором $p > n$, то ввиду неравенства

$$\|u_2(t)\|_\theta \leqslant c_\theta \varepsilon^2 R^2 \int\limits_0^t e^{(3/2)a(t-s)}(t-s)^{-1/2-(n/2)(2/p-1/\theta)} e^{2as}\,ds \leqslant c_\theta^1 \varepsilon^2 R^2 e^{2at} \qquad (31)$$

для всех $\theta$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant 2/p - 1/\theta < 1/n$. Так как в качестве $p$ можно взять любое $p > n$, то $u(t) \in C([0,b], S_\theta(\mathbb{R}^n))$ при $n/2 < \theta \leqslant n$. Используя этот результат, аналогичным образом устанавливаем, что $u(t) \in C([0,b], S_p(\mathbb{R}^n))$ при выполнении условия $0 \leqslant 2/\theta - 1/p < 1/n$, $2/\theta < 1$, т. е. при $1 < p \leqslant n/2$.

Теперь пусть $p \in (1, n]$. Положим $p_0 = p$, $p_1 = 2p$, $p_2 = 4p$, $\ldots$, $p_k = 2^k p > n$, причем $k$ — первое из целых с условием $2^k p > n$. Пусть $[0,\sigma]$ — максимальный отрезок, на котором выполняются неравенства

$$\|u(t)\|_{p_j} \leqslant \varepsilon R \|\phi\|_{p_j} e^{at}, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Тогда последовательно полагая в неравенстве (31) $\theta = p_k$, $p = p_k$; $\theta = p_{k-1}$, $p = p_k$; $\theta = p_{k-2}$, $p = p_{k-1}; \ldots; \theta = p_0$, $p = p_1$ устанавливаем, что на $[0,\sigma]$ выполняются оценки

$$\|u_2(t)\|_{p_j} \leqslant c_j \varepsilon^2 R^2 e^{2at}, \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

где константы $c_j$ не зависят от $\varepsilon$. Следовательно, на $[0,\sigma]$ имеем

$$\|u(t)\|_{p_j} \leqslant \varepsilon \|\phi\|_{p_j} e^{at}(1 + c\varepsilon R^2 e^{at}),$$

где $c = \sup_j (c_j / \|\phi\|_{p_j})$.

При достаточно малых $\varepsilon$ существует такое $\sigma_1 \leqslant \sigma$, что $1 + c\varepsilon R^2 e^{a\sigma_1} = R$. Но тогда выполняется неравенство

$$\|u(\sigma_1)\|_p \geqslant \varepsilon \|\phi\|_p e^{a\sigma_1}(1 - c\varepsilon R^2 e^{a\sigma_1}) = \frac{\|\phi\|_p (R-1)(2-R)}{cR^2},$$

которое устанавливает неустойчивость при $p \in (1, n]$. $\triangleright$

## Литература

1. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
2. *Kato T.* Strong $L^p$-solutions of the Navier — Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions // Math. Z.—1984.—Vol. 187.—P. 471–480.
3. *Сазонов Л. И., Юдович В. И.* Устойчивость стационарных решений параболических уравнений и системы Навье — Стокса во всем пространстве // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 29, № 1.—С. 151–158.
4. *Biler P., Cannone M., Karch G.* Asymptotic stability of Navier — Stokes flow past an obstacle // Banach center publications.—2004.—Vol. 66.—P. 47–59.
5. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавк. мат. журн.—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 50–61.
6. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.
7. *Kobayashi T., Shibata Y.* On the Oseen equation in exterior domains // Math. Ann.—1998.—Vol. 310.—P. 1–45.
8. *Enomoto Y., Shibata Y.* On the rate of decay of the Oseen semigroup in exterior domains and its application to Navier — Stokes equation // J. of Math. Fluid Mech.—2005.—Vol. 7, № 3.—P. 339–367.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1977.—455 с.

*Статья поступила 3 декабря 2009 г.*

Сазонов Леонид Иванович
Южный федеральный университет,
*доцент кафедры выч. мат-ки и математической физики*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
*заведующий лаб. математической физики*
E-mail: `sazonov@ns.math.rsu.ru`

## ESTIMATES OF THE PERTURBED OZEEN SEMIGROUP IN $\mathbb{R}^n$ AND STABILITY OF THE NAVIER — STOKES FLOW

Sazonov L. I.

We present power-like estimates for the perturbed Oseen semigroup in $\mathbb{R}^n$. They are used for an estimation of solutions in the nonlinear perturbed Oseen system.

**Key words:** Navier — Stokes system, Oseen semigroup, stability.