Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 21–27

УДК **537.872**

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА С МЕТАЛЛОМ[1]

В. И. Кесаев, И. Н. Малиев

Получены новые формулы для потенциала и тангенциальной компоненты электрического поля, являющегося откликом металла на пролет заряженной частицы. Получена оригинальная формула для силы «трения» между зарядом и поверхностью металла.

Ключевые слова: движущийся точечный заряд, диэлектрическая проницаемость, поверхность металла, низкочастотное приближение, потенциал, сила «трения».

1. Поскольку уравнения электромагнитного поля являются линейными, то взаимодействие посредством такого поля внутри многочастичной системы можно исследовать с помощью принципа суперпозиции. Применение этого принципа требует знания решения уравнений Максвелла для одной частицы в каждой прикладной электродинамической задаче. Решению одной из таких проблем — взаимодействию движущейся заряженной частицы с поверхностью металла посвящено значительное число научных работ (см., например, прекрасно написанные обзоры [1, 2]). В нашей недавней работе [3] было изучено взаимодействие линейной цепочки зарядов, движущихся параллельно поверхности металла, в идеальном случае, т. е. когда диэлектрическая проницаемость металла $|\epsilon(\omega)| \to \infty$.

Ясно, что в приложениях существенный интерес представляет учет свойств реального металла, которые в макроскопической электродинамике определяются двумя интегральными характеристиками — диэлектрической $\epsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями.

Далее нас будет интересовать отклик металла на электрическое поле пролетающего над ним заряда, поэтому мы ограничимся вопросом о выборе функции $\epsilon(\omega)$. При решении неоднородного волнового уравнения для скалярного потенциала электрического поля φ, описывающего упомянутое взаимодействие, исследователи в основном рассматривают модель Друде (высокочастотное приближение), в которой $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, где ω_p — плазменная частота электронов проводимости (значение ω_p порядка 10^{14} сек$^{-1}$), и низкочастотное приближение, в котором предполагается, что $\epsilon(\omega) = 1 + i4\pi\sigma/\omega$, i — мнимая единица, σ — удельная проводимость металла (значение σ порядка 10^8 сек$^{-1}$).

Используя преобразование Лапласа по переменной z, подобно тому, как это было сделано в [3] для случая идеального проводника, можно показать, что часть решения упомянутого выше волнового уравнения, содержащая отклик металла на пролет точечного заряда над его плоской поверхностью, имеет вид:

$$\varphi_{met}(\vec{r}, t) = \frac{q}{2\pi} \int\limits_0^\infty \gamma^{-1}(\theta)\, dk \int\limits_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\gamma(\theta)k(z+z_0)} \Delta(kV\cos\theta)\, e^{i\vec{k}\vec{R}}. \tag{3.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Федерального агенства по образованию в рамках тематического плана Северо-Осетинского государственного университета.

Здесь $\gamma(\theta) = \sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}$ — «модифицированный» фактор Лоренца, $\beta^2 = V^2/c^2$, где V, c — скорости заряда и света соответственно, векторы $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{R} = \{x - Vt, y\}$, $\vec{k} = \{k\cos\theta, k\sin\theta\}$. Точечный заряд, величина которого q, движется вдоль прямой линии $y = 0$, $z = z_0 > 0$, $x = Vt$ в вакууме, металл занимает полупространство $z \leqslant 0$, а его плоская поверхность совпадает с плоскостью xy. Отклик металла описывается величиной

$$\Delta(\omega) = \frac{1-\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)}. \tag{3.2}$$

Чтобы подтвердить справедливость (3.1), напишем одно из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\vec{\mathscr{D}}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t), \tag{3.3}$$

где электрическая индукция

$$\vec{\mathscr{D}}(\vec{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \epsilon(t-t')\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t')\, dt = \int\limits_{0}^{\infty} \epsilon(\tau)\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t-\tau)\, d\tau, \tag{3.4}$$

а диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon(t)$ рассматривается как ядро интегрального оператора. Здесь, по определению, электрическое поле

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathscr{A}}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \tag{3.5}$$

и все остальные обозначения имеют стандартный смысл (см., например, [4]), а именно: φ — скалярный потенциал, $\vec{\mathscr{A}}$ — векторный потенциал, причем из свойств градиентной инвариантности уравнений поля мы можем потребовать выполнения условия

$$\operatorname{div}\vec{\mathscr{A}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{3.6}$$

которое называется *лоренцевской калибровкой*. С учетом траектории движения заряда $\vec{r}_0(t) = \{Vt, 0, z_0\}$ плотность заряда $\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$, где $\delta(\vec{r})$ — функция Дирака.

Применяя обычную процедуру перехода в обратное пространство волновых векторов и частот, т. е. полагая справедливым для любой физической величины

$$\vec{f}(\vec{R}, z, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega t)} \hat{\vec{f}}(\vec{k}, z, \omega) \tag{3.7}$$

и вводя обозначение

$$\epsilon(\omega) \equiv \int\limits_{0}^{\infty} \epsilon(t) e^{i\omega t}\, dt, \tag{3.8}$$

находим, после подстановки (3.4) и (3.5) в (3.3), с учетом (3.6), (3.7), (3.8), уравнение для Фурье образа потенциала $\hat{\varphi}(\vec{k}, z, \omega)$:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2(\vec{k}, \omega)\right]\hat{\varphi}(\vec{k}, z, \omega) = \hat{g}(\vec{k}, z, \omega), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(\vec{k}, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx dy dt\, e^{-i(\vec{k}\vec{R}-\omega t)} \varphi(\vec{R}, z, t), \\ \hat{g}(\vec{k}, z, \omega) = \frac{1}{\hat{\epsilon}(z,\omega)}\hat{\rho}(\vec{k}, z, \omega) = \frac{2q}{\hat{\epsilon}}\delta(z - z_0)\delta(k_1 V - \omega). \end{cases} \tag{3.10}$$

Здесь $\vec{k} = \{k_1, k_2\}$, $\vec{R} = \{x, y\}$, $\chi^2 = k^2 - \omega^2/c^2$, а

$$\hat{\epsilon}(z, \omega) \equiv \epsilon(\omega) H(-z) + H(z), \tag{3.11}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, а $\epsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость металла (3.8), для которой обычно принимаются те модели, о которых мы говорили выше.

Уравнение (3.9) можно решить с помощью преобразования Лапласа для $\hat{\varphi}$ по переменной z (так как нас интересует решение для вакуума, то $z \geqslant 0$). На границе металл-вакуум (т. е. в плоскости $z = 0$) потенциал непрерывен вместе с тангенциальными производными φ_x, φ_y, а нормальная производная φ_z испытывает разрыв первого рода такой, что $\hat{\epsilon}(z \to +0)\varphi_z(+0) = \hat{\epsilon}(z \to -0)\varphi_z(-0)$.

С учетом сказанного, находим (выкладки опускаем)

$$\hat{\varphi}(\vec{k}, z, \omega) = \frac{q}{\chi}\,\delta(k_1 V - \omega)\left[e^{-\chi|z-z_0|} + \frac{1-\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)}\,e^{-\chi(z+z_0)}\right]. \tag{3.12}$$

Решение (3.12) состоит из двух слагаемых — первое описывает потенциал собственного поля заряда, которое становится бесконечно большим при $z = z_0$, а второе — потенциал поля, созданного индуцированными поверхностными зарядами (электронами проводимости) металла — потенциал «изображения». Подставляя второе слагаемое из (3.12) в формулу для обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned}\varphi_{met}(x, y, z, t)\Big|_{y=0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2\, e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega t)} \cdot \frac{1-\epsilon(\omega)}{1+\epsilon(\omega)} \\ \times \frac{q\delta(k_1 V - \omega)}{\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}} \cdot e^{-(z_0+z)\sqrt{k^2-\omega^2/c^2}}\Big|_{y=0},\end{aligned} \tag{3.13}$$

после интегрирования по частоте ω находим (в полярных координатах k, θ: $k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$) формулу (3.1).

В нерелятивистском случае $\beta^2 \ll 1$ и на линии нахождения источника металлом индуцируется потенциал

$$\varphi_{met}(x, 0, z_0, t) = \frac{q}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk\, e^{-2z_0 k}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik(x-Vt)\cos\theta}\Delta(kV\cos\theta)\,d\theta. \tag{3.14}$$

Нужно отметить, что формула (3.14), полученная нами, совпадает вплоть до обозначений с формулами из [1, 2] для случая параллельного равномерного движения нерелятивистского ($\gamma(\theta) \to 1$) заряда над плоской поверхностью металла.

В низкочастотном приближении имеем

$$\varphi_{met}(x, 0, z_0, t) = -\frac{iq}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk\, e^{-2z_0 k}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta\, e^{ik(x-Vt)\cos\theta}}{i + k\lambda\cos\theta}, \tag{3.15}$$

где $\lambda = V/2\pi\sigma$ — характерная длина задачи. Формула (3.15) далее обычно исследователями преобразуется к виду, содержащему функцию Макдональда [1, 2] (это достигается тем, что в двойном интеграле вначале интегрирование производится по переменной k).

Целью данной заметки является вычисление (3.15) в виде, позволяющем исследовать поведение φ_{met} как функцию скорости частицы. Приведение (3.15) к форме, которая нетривиальным образом отличается от имеющихся в литературе, достигается явным вычислением интеграла по углам.

2. Рассмотрим интеграл

$$I(ka,kb) = -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{ika\cos\theta}}{i + kb\cos\theta}\, d\theta, \tag{3.16}$$

как функцию двух переменных ka, kb. Идея вычисления (3.16) заключается в составлении для I дифференциального уравнения по переменной a ($a \in \mathbb{R}$) и его решения. Так как $I(0,kb) = -2\pi/\sqrt{1+k^2b^2}$, $I(ka,0) = -2\pi J_0(ka)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого индекса, нетрудно получить:

$$I(ka,kb) = -2\pi e^{a/b}\left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2b^2}} \mp \int_0^{\pm a/b} J_0(kbt)\, e^{\mp t}\, dt\right], \tag{3.17}$$

где верхний знак справедлив для $a > 0$, а нижний — для случая $a < 0$.

Покажем справедливость (3.17). Прежде всего заметим, что выражение (3.16), хотя и содержит мнимую единицу, вещественно (в этом легко убедиться, разделяя область интегрирования в (3.16) на два равных отрезка $[0,\pi]$, $[\pi,2\pi]$, и заменяя переменную θ во втором интеграле на $\theta+\pi$, получающаяся сумма двух интегралов оказывается вещественной). Очевидно, подынтегральная функция и ее частная производная по a в выражении (3.16) являются непрерывными функциями по переменным a и θ для вещественных ka и kb. Поэтому, следуя теореме дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, справедливо выполнение операции дифференцирования по a ($a \in \mathbb{R}$) под знаком интеграла по θ в (3.16). Именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} &= -i \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{ika\cos\theta}}{i + kb\cos\theta}\right) d\theta = \bigl\{\text{далее предполагаем } b \neq 0\bigr\} \\ &= \frac{1}{b}\int_0^{2\pi} e^{ika\cos\theta}\, d\theta + \frac{1}{b} I(ka,kb). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь предполагается, что $a > 0$. Отсюда имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial a} - \frac{1}{b} I = \frac{2\pi}{b} J_0(ka). \tag{3.19}$$

Решая (3.19) методом вариации произвольной постоянной, с учетом представленных выше значений $I(ka,0)$ и $I(0,kb)$, находим решение

$$I(ka,kb) = C(ka,kb)e^{a/b} = e^{a/b}\left[2\pi \int_0^{a/b} J_0(kbt)e^{-t}\, dt - \frac{2\pi}{\sqrt{1+k^2b^2}}\right]. \tag{3.20}$$

Действуя подобным образом для случая $a < 0$, находим вид дифференциального уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial |a|} - \frac{1}{b}\, I = -\frac{2\pi}{b}\, J_0(k|a|).$$

Так как функция Бесселя $J_0(x)$ четна, можем написать

$$\begin{aligned} I = C \cdot e^{-|a|/b} &= e^{-|a|/b}\Big[-2\pi \int\limits_0^{|a|} J_0(kx)e^{+x/b}\, d(x/b) + c_0\Big] \\ &= -2\pi e^{a/b}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+k^2b^2}} + \int\limits_0^{-a/b} J_0(kbt)e^t\, dt\Big]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Таким образом, обе формулы (3.20) и (3.21) можно написать в виде (3.17), что и требовалось.

Подставляя (3.17) в (3.15) и интегрируя по переменной k, находим первую основную формулу нашей работы, которая описывает потенциал электрического поля, создаваемого электронами проводимости металла на линии движения источника в низкочастотном приближении.

$$\varphi_{met}(x,0,z_0,t) = -\frac{q}{2z_0}\, e^{a/\lambda} \int\limits_{a/\lambda}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{1+\tilde{\lambda}^2u^2}}. \tag{3.22}$$

Здесь $a = x - Vt$, $\lambda/2z_0 = \tilde{\lambda}$ — характерный параметр задачи.

Зависимость потенциала от x позволяет найти тангенциальное электрическое поле $\vec{\mathscr{E}}_x = (-\vec{\nabla}\varphi)_x$ и, соответственно, силу «трения» $\vec{F}_x = q\vec{\mathscr{E}}_x$. Вычисляя $\mathscr{E}_x$ с помощью формулы (3.22), находим, что

$$\mathscr{E}_x(x,0,z_0,t) = -\frac{q\lambda}{(2z_0)^3}\, e^{a/\lambda} \int\limits_{a/\lambda}^{\infty} \frac{ue^{-u}\, du}{(1+\tilde{\lambda}^2u^2)^{3/2}}. \tag{3.23}$$

Это вторая основная формула нашей работы. Отсюда получаем, что сила трения в месте нахождения заряда-источника равна

$$F = -\frac{q^2V}{(2z_0)^3 2\pi\sigma} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{(1+\tilde{\lambda}^2u^2)^{3/2}}. \tag{3.24}$$

Отметим, что интегралы в (3.22) и (3.23) могут быть выражены через функции Вебера и Неймана нулевого индекса от $\tilde{\lambda}$. Покажем это, используя альтернативное представление поля (3.23):

$$\mathscr{E}_x(x,0,z_0,t) = -\frac{q}{2z_0\lambda}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+(a/2z_0)^2}} - e^{a/\lambda} \int\limits_{a/\lambda}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{1+\tilde{\lambda}^2u^2}}\Big]. \tag{3.25}$$

Тогда из (3.24) легко найти значение индуцированного поля в точке нахождения источника

$$\mathscr{E}_x(a)|_{a=0} = -\frac{q}{2z_0\lambda}\Big[1 - \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{1+\tilde{\lambda}^2u^2}}\Big], \tag{3.26}$$

где интеграл может быть выражен в виде [5]:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{1+\tilde{\lambda}^2u^2}} = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}^{-1} shz}\, dz = -\frac{\pi}{2\tilde{\lambda}}\, \big[E_0(1/\tilde{\lambda}) + N_0(1/\tilde{\lambda})\big], \tag{3.27}$$

где $E_0(x)$ и $N_0(x)$ — функции Вебера и Неймана соответственно. Поэтому для силы трения находим точное выражение

$$F = -\frac{q^2}{(2z_0)^2\tilde{\lambda}} \left\{ \frac{\pi}{2\tilde{\lambda}} \big[E_0(1/\tilde{\lambda}) + N_0(1/\tilde{\lambda}) \big] + 1 \right\}, \tag{3.28}$$

которое можно считать третьей основной формулой нашей работы.

Из формулы (3.28) несложно получить предельные случаи малых ($v \to 0$, т. е. $V/4\pi\sigma z_0 \ll 1$) и больших скоростей ($v \to \infty$, т. е. $V/4\pi\sigma z_0 \gtrsim 1$) движения источника.

В случае медленного движения, используя асимптотику функции Вебера и Неймана при больших значениях аргумента [5] (с. 285)

$$E_0(z) + N_0(z) \approx -\frac{2}{\pi z} \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{9}{z^4} + \dots \right),$$

находим в главном порядке по скорости

$$F = -\frac{q^2}{2z_0} \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} = -\frac{q^2}{16\pi\sigma z_0^3} V,$$

что в точности совпадает с формулой (40) из работы [6]. При больших скоростях движения, для которых еще справедливо нерелятивистское приближение, нетрудно получить, имея в виду асимптотику функций Вебера и Неймана [5] (с. 194, 285),

$$E_0(z) + N_0(z) \approx -\frac{2}{\pi} \left(z + \ln \frac{2}{\gamma z} \right), \quad |z| \ll 1.$$

γ — постоянная Эйлера, следующее выражение, справедливое в главном порядке по скорости

$$F = -\frac{q^2}{2z_0\lambda} = -\frac{\pi q^2 \sigma}{z_0 V}.$$

3. Формулы (3.22), (3.23) и (3.28), хотя и относятся к хорошо изученному динамическому взаимодействию заряда с металлом [1, 2], в приведенной нами форме, насколько нам известно, никем не устанавливались, и поэтому являются оригинальными. На наш взгляд, они важны не столько сами по себе, сколько при использовании в многочастичной задаче, когда вблизи поверхности металла движутся пучки заряженных частиц или нейтральных атомов со спонтанными дипольными моментами и могут пользоваться при нахождении суммарного поля принципом суперпозиции. При этом формулы (3.22) и (3.23) становятся основой для построения решения и их замкнутый вид является, по-видимому, преимуществом.

Литература

1. *Дедков Г. В., Кясов А. А.* Электромагнитные и флуктуационно-электромагнитные силы взаимодействия движущихся частиц и нанозондов с поверхностями. Нерелятивистское рассмотрение. (Обзор) // ФТТ.—2002.—Т. 44, вып. 10.—С. 1729–1751.
2. *Дедков Г. В., Кясов А. А.* Флуктуационно-электромагнитное взаимодействие нейтральной движущейся частицы с поверхностью конденсированной среды: релятивистское рассмотрение. (Обзор) // ФТТ.—2009.—Т. 51, вып. 1.—С. 3–27.
3. *Кесаев В. И., Малиев И. Н.* Взаимодействие цепочки движущихся зарядов с идеальным проводником // Владикавк. мат. журн.—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 10–14.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.—М: Наука, 1982.—622 с.

5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции.—М: Наука, 1977.—342 с.
6. *Дедков Г. В., Кясов А. А.* Флуктуационно-электромагнитное взаимодействие движущихся частиц с плоской поверхностью // ФТТ.—2001.—Т. 43, вып. 1.—С. 169–176.

Статья поступила 1 апреля 2010 г.

Кесаев Виктор Иванович
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры теоретической и мат. физики
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 24

Малиев Игорь Нохович
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры теоретической и мат. физики
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 24

ON THE THEORY OF INTERACTION BETWEEN A MOVING POINT CHARGE AND A METAL

Kesayev V. I., Maliev I. N.

New formulas for the potential and the longitudinal projection of an electric field induced by a metal in vacuum are derived in the case of nonrelativistic point charged particle is uniformly moving above a plane metallic surface parallel to it. Also it is obtained an new expression for the «friction» force between the charge and the metal is also obtained.

Key words: moving point charged particle, plane surface, dielectric susceptibility, low-frequency approximation, potential, «friction» force.