Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 2, С. 15–25

УДК **519.1**

КОНЕЧНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПЛОСКОСТИ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ С 8 ОБРАЗУЮЩИМИ

А. И. Долгарев

Регулярные конечные гиперболические плоскости получены с использованием нильпотентных групп ступени 2 простого периода, удовлетворяющие дополнительным условиям. Группе в виде таблицы связей сопоставлен латинский квадрат, который позволяет в тривиальную регулярную гиперболическую $\langle 2,5\rangle$-плоскость $\nabla(7)$ ввести отношение эквивалентности на множестве ее прямых (выделить параллельные прямые). Тривиальная плоскость $\nabla(7)$ моделируется 7-угольником, его вершины есть точки плоскости, стороны и диагонали — прямые плоскости; прямая есть множество двух точек; для каждой пары (P,l), $P\notin l$, через точку P проходит две прямые, пересекающие прямую l и 5 прямых, не пересекающих l, см. [1, с. 45, 46]. Затем используется процесс проективизации плоскости, аналогичный получению проективной плоскости из аффинной. Построены четыре неизоморфные $\langle 3,4\rangle$-плоскости. Число неизоморфных $\langle 3,4\rangle$-плоскостей не меньше числа неизоморфных нильпотентных групп ступени 2 простого периода с 8 образующими элементами. Неизоморфные $\langle 3,4\rangle$-плоскости получены впервые. Для некоторых точек и прямых рассматриваемых плоскостей выполняется конфигурация Дезарга, но в общем плоскости недезарговы. Перспективные отображения плоскости не являются ее коллинеациями.
Результаты работы сообщены на XIV международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» в 2005 году, [2]. Нильпотентные группы ступени 2 простого периода с 8 образующими описаны в [3].

Ключевые слова: неизоморфные конечные регулярные гиперболические плоскости, недезарговы плоскости.

1. Нильпотентные группы ступени 2 простого периода p с 8 образующими и коммутантом с 7 образующими

Рассматриваются только конечные нильпотентные группы G простого периода p ступени 2. Если $g\in G$, то $g^p=e$, где e — единичный элемент группы. Коммутант $C(G)$ группы G совпадает с ее центром $Z(G)$ и подгруппой Фраттини (подгруппа Фраттини состоит из необразующих элементов группы). Если $C(G)$ является циклической группой, т. е. $C(G)=\langle c\rangle$ ($C(G)$ порождается элементом c), то группа G обладает следующими свойствами.

(1) Группа имеет четное число образующих элементов. Обозначим образующие элементы $a_1,a_2,\ldots,a_m$; m — четное число.

(2) Образующие можно подобрать так, что их коммутаторы имеют значения: $[a_1,a_2],[a_3,a_4],\ldots,[a_{m-1},a_m]=c$, остальные $[a_i,a_j]=e$, $i,j=1,\ldots,8$.

Доказательство этого утверждения содержится в [3]. Если коммутант $C(G)$ группы G имеет несколько образующих элементов $c_1,c_2,\ldots,c_l$, то, рассматривая фактор-группу G/C_j, где $C_j=\langle c_1,c_2,\ldots,c_{j-1},c_{j+1},c_l\rangle$ (подгруппа C_j порождается всеми элементами c_i,

$i = 1, 2, \dots, l$, кроме $c_i = c_j$), получаем, что ее образующие a_iC_j обладают указанным свойством (2).

Теперь рассматриваем группу N_p^8 с 8 образующими $a_1, a_2, \dots, a_m$, $C(N_p^8) = Z(N_p^8)$ коммутант $C(N_p^8)$ порождается 7 элементами. Коммутаторы $[a_i, a_j]$ образующих группы можно распределить по циклическим подгруппам $\langle c_k \rangle$ коммутанта по четыре в каждой подгруппе, см. таблицу 1. В таблице 1 вместо $[a_i, a_j]$ выписаны только индексы $[i, j]$; наборы неупорядоченных пар индексов $[i, j]$ для $[a_i, a_j]$ из одной подгруппы $\langle c_k \rangle$ называются *k-связями в группе*. Таблица 1 есть один из примеров набора k-связей в группе N_p^8.

Таблица 1

1-связь	[1,2]	[3,4]	[5,6]	[7,8]
2-связь	[1,3]	[2,8]	[4,5]	[6,7]
3-связь	[1,4]	[2,7]	[3,5]	[6,8]
4-связь	[1,5]	[2,6]	[3,8]	[4,7]
5-связь	[1,6]	[2,5]	[3,7]	[4,8]
6-связь	[1,7]	[2,3]	[4,6]	[5,8]
7-связь	[1,8]	[2,4]	[3,6]	[5,7]

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	6	4	7	5
3	2	3		1	5	7	4	6
4	3	2	1		7	6	5	4
5	4	6	5	7		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	5	6	4	3	2	1	

Образующие группы N_p^8 и коммутанта $C(N_p^8)$ можно подобрать так, что индексы элементов c_k, $k = 1, 2, \dots, l$, составляют таблицу 2, строки и столбцы которой занумерованы индексами элементов a_i, $i = 1, \dots, 8$, индекс k находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца, если $[a_i, a_j] = c_k$.

Существование групп с такими свойствами образующих элементов доказано в [3, п. 1.5, теорема 1].

Указанная таблица называется *таблицей связей группы*. Таблица связей группы обладает следующими свойствами.

1. Диагональ таблицы связей пуста.

2. Таблица симметрична относительно диагонали.

3. Каждый номер связи в таблице встречается 8 раз; 4 раза над диагональю.

4. В каждой строке и в каждом столбце таблицы каждый номер связи встречается по одному разу. Таблица связей группы есть латинский квадрат 8×8, клетки латинского квадрата заполнены номерами 1–7, или не заполнены ничем.

Одна группа N_p^8 может иметь несколько таблиц связей; их можно получить, перенумеровывая связи и образующие или рассматривая различные системы образующих группы. Одинаковым таблицам связей соответствуют изоморфные группы.

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	5	4	7	6
3	2	3		1	6	7	4	5
4	3	2	1		7	6	5	4
5	4	5	6	7		1	2	3
6	5	4	7	6	1		3	2
7	6	7	4	5	2	3		1
8	7	6	5	4	3	2	1	

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	7	4	5	6
3	2	3		1	5	6	7	4
4	3	2	1		6	7	4	5
5	4	7	5	6		1	2	3
6	5	4	6	7	1		3	2
7	6	5	7	4	2	3		1
8	7	6	4	5	3	2	1	

Пусть даны две таблицы связей размерами 8×8. Перенумеровываем образующие элементы группы и связи всевозможным образом в каждой из таблиц связей. Если в результате получатся одинаковые таблицы связей, то даны таблицы связей изоморфных групп. Если не получится одинаковых таблиц связей, то данные таблицы связей задают неизоморфные группы.

В [3] установлено, что существует не менее четырех видов попарно неизоморфных групп N_p^8 [3, п. 2.3, теорема 1]. Их таблицы связей в дополнение к таблице 2 есть таблицы 3–8.

Таблица 5

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7
2	1		3	2	6	7	4	5
3	2	3		1	7	6	5	4
4	3	2	1		5	4	7	6
5	4	6	7	5		1	2	3
6	5	7	6	4	1		3	2
7	6	4	5	7	2	3		1
8	7	5	4	6	3	2	1	

Таблицу 6 из [3] здесь мы записали как таблицу 5. Число 8 является наименьшим четным, таким, что существуют неизоморфные группы N_p^8.

2. Регулярные конечные гиперболические плоскости

Конечная плоскость содержит конечное количество точек и конечное количество прямых. Всякая прямая содержит не менее двух точек и через всякие две различные точки проходит единственная прямая. Существуют разные виды конечных плоскостей: аффинные, проективные и др. (см., например, [1]). Для каждого вида конечных плоскостей интересно получить неизоморфные плоскости с одинаковыми числовыми характеристиками. В [1, с. 45–49] определены и регулярные гиперболические плоскости. Пусть P — точка, l — прямая регулярной гиперболической плоскости. Для всякой пары $[P, l]$ в плоскости существует m прямых, проходящих через точку P и пересекающих прямую l, и n прямых, проходящих через P и не пересекающих l. Прямая содержит m точек. Такая плоскость называется р*егулярной гиперболической* или $\langle m, n\rangle$*-плоскостью.* Модель $\nabla(k)$ тривиальной гиперболической плоскости дает k-угольник. Вершины k-угольника есть точки, стороны и диагонали — прямые. Прямая понимается как множество двух точек. Это $\langle 2, k-3\rangle$-плоскость, она считается неинтересной. Мы рассмотрим $\varepsilon\nabla(k)$-плоскость — это $\nabla(k)$-плоскость с дополнительным условием:

(ε) *на множестве прямых* $\nabla(k)$*-плоскости задано отношение эквивалентности: для каждой прямой указаны все параллельные ей прямые.*

Из всех прямых, не пересекающих данную прямую и проходящих через данную вне прямой точку, отношение (ε) выделяет одну прямую, *параллельную* данной; остальные прямые *сверхпараллельны* данной прямой. Конечные гиперболические плоскости с таким взаимным расположением прямых рассмотрены и в [5, 6].

Ниже мы сначала построим $\varepsilon\nabla(8)$-плоскости по таблицам связей групп N_p^8, а затем, используя процесс проективизации, из этих плоскостей и минимальной конечной проективной плоскости, т. е. плоскости Фано, построим $\langle 3, 4\rangle$-плоскости. Мы впервые получили неизоморфные плоскости с заданными m и n.

3. Плоскости $\varepsilon\nabla(8)$

Рассматриваем конечную плоскость Σ, точки которой обозначены $P_1, P_2, \ldots, P_8$ и прямые $l_1, l_2, \ldots, l_{28}$. Известно, какие точки каким прямым принадлежат, под прямыми можно понимать множества точек. Для плоскости составляется таблица инцидентности. Точки плоскости Σ есть столбцы таблицы инцидентности, прямые — строки. Если $P_j \in l_i$, то в клетке пересечения i-ой строки и j-го столбца ставится значок $*$. Если $P_j \notin l_i$, то в клетке (i, j) значок отсутствует.

Таблица 6

*	*						
		*	*				
				*	*		
						*	*
*		*					
	*		*				
				*		*	
					*		*
*			*				
	*	*					
				*			*
					*	*	
*				*			
	*				*		
		*				*	
			*				*
*					*		
	*						*
		*		*			
			*			*	
*						*	
	*			*			
		*					*
			*		*		
*							*
	*					*	
		*			*		
			*	*			

Таблица 7

*	*						
		*	*				
				*	*		
						*	*
*		*					
	*		*				
				*		*	
					*		*
*			*				
	*	*					
				*			*
					*	*	
*				*			
	*				*		
		*				*	
			*				*
*					*		
	*			*			
		*					*
			*			*	
*						*	
	*						*
		*		*			
			*		*		
*							*
	*					*	
		*			*		
			*	*			

Каждому образующему элементу a_j группы N_p^8 поставим в соответствие точку P_j плоскости $\varepsilon\nabla(8)$, коммутатору $[a_i, a_j] = c_s \neq e$ поставим в соответствие прямую l_s, номер прямой определяется номерами i, j, а не номером образующего коммутанта.

Таким образом, прямая l_s есть множество двух точек P_i, P_j; $l_s = P_iP_j$. Прямые P_iP_j и P_rP_t параллельны, если коммутаторы образующих $[a_i, a_j]$, $[a_r, a_t]$ лежат в одной циклической $\langle c_k \rangle$. Составим таблицу инцидентности $\varepsilon\nabla(8)$-плоскости по таблице связей 2 группы N_p^8. 1-связи соответствуют прямые $l_1 = P_1P_2$, $l_2 = P_3P_4$, $l_3 = P_5P_6$, $l_4 = P_7P_8$. Это прямые одного пучка параллельных прямых. В строке l_1 таблицы инцидентности ставим значок $*$ в первом и втором столбцах; в строке l_2 ставим значок $*$ в третьем и четвертом столбцах; в строке l_3 — в пятом и шестом столбцах; в l_4 — в седьмом и восьмом столбцах, см. таблицу 6. Блок первых четырех строк в таблице выделен. Также проставляем знаки $*$ в строках l_5–l_8, используя клетки таблицы связей группы, где записано число 2, соответствующее 2-связи и т. д.

Таблица 8

*	*						
		*	*				
				*	*		
						*	*
*		*					
	*		*				
				*		*	
					*		*
*			*				
	*	*					
				*			*
					*	*	
*				*			
	*				*		
		*					*
			*			*	
*					*		
	*					*	
		*		*			
			*				*
*						*	
	*						*
		*			*		
			*	*			
*							*
	*			*			
		*				*	
			*		*		

Таблица 9

*	*						
		*	*				
				*	*		
						*	*
*		*					
	*		*				
				*		*	
					*		*
*			*				
	*	*					
				*			*
					*	*	
*				*			
	*					*	
		*					*
			*		*		
*					*		
	*						*
		*				*	
			*	*			
*						*	
	*			*			
		*			*		
			*				*
*							*
	*				*		
		*		*			
			*			*	

Таблицы 7–9 инцидентности $\varepsilon\nabla(8)$-плоскостей составлены по таблицам связей 3–5 соответственно. Эти таблицы содержат по 7 блоков по 4 строки в каждом блоке и по 8 столбцов.

4. Таблицы инцидентности $\langle 3, 4\rangle$-плоскостей

Минимальная плоскость Фано имеет таблицу инцидентности

Таблица 10

*	*	*				
*			*			*
*				*	*	
	*		*		*	
	*			*		*
		*	*	*		
		*			*	*

По таблицам 6–9 составим таблицы инцидентности $\langle 3,4\rangle$-плоскостей. Каждая таблица имеет $28+7=35$ строк и $8+7$ столбцов, т. е. каждая $\langle 3,4\rangle$-плоскость содержит 35 прямых и 15 точек.

Таблица 11

*	*							*						
		*	*					*						
				*	*			*						
						*	*	*						
*		*							*					
	*		*						*					
				*		*			*					
					*		*		*					
*			*							*				
	*	*								*				
				*			*			*				
					*	*				*				
*				*							*			
	*				*						*			
		*				*					*			
			*				*				*			
*					*							*		
	*						*					*		
		*		*								*		
			*			*						*		
*						*							*	
	*			*									*	
		*					*						*	
			*		*								*	
*							*							*
	*					*								*
		*			*									*
			*	*										*
								*	*	*				
								*			*			*
								*				*	*	
									*		*		*	
									*			*		*
										*	*	*		
										*			*	*

Таблицу 6 разместим в таблице 11 в левом верхнем углу, заняв первые 28 строк и первые 8 столбцов; таблицу 10 разместим в таблице 11 в правом нижнем углу, заняв нижние 7 строк и правые 7 столбцов. Левый нижний угол таблицы оставляем свободным. В первые 4 строки в столбец 9 ставим значок $*$, затем в 5–8 строки в столбец 10 ставим значок $*$, и т. д., см. таблицу 11. Получилась таблица инцидентности $\langle 3,4\rangle$-плоскости, построенная по таблице 6, т. е. по таблице связей 1. Также строим таблицы инцидентности 12–14 $\langle 3,4\rangle$-плоскостей по таблицам инцидентности 7–9 и 10 $\varepsilon\nabla(8)$-плоскостей, соответствующих таблицам связей 3–5 групп N_p^8.

Таблица 12

*	*							*						
		*	*					*						
				*	*			*						
						*	*	*						
*		*							*					
	*		*						*					
				*		*			*					
					*		*		*					
*			*							*				
	*	*								*				
				*			*			*				
					*	*				*				
*				*							*			
	*				*						*			
		*				*					*			
			*				*				*			
*					*							*		
	*			*								*		
		*					*					*		
			*			*						*		
*						*							*	
	*						*						*	
		*		*									*	
			*		*								*	
*							*							*
	*					*								*
		*			*									*
			*	*										*
								*	*	*				
								*			*			*
								*				*	*	
									*		*		*	
									*			*		*
										*	*	*		
										*			*	*

Таблицу инцидентности плоскости можно изменить, производя перестановки ее строк и столбцов. Такие преобразования таблиц инцидентности 6–9 соответствуют преобразованиям таблиц связей 2–5. Неизоморфные таблицы инцидентности 6–9 соответствуют неизоморфным группам N_p^8. Согласно построению таблиц, имеем неизоморфные $\langle 3,4\rangle$-плоскости, для которых составлены таблицы инцидентности 11–14.

Таблицы 6–9 инцидентности $\varepsilon\nabla(8)$-плоскостей содержат по три первых одинаковых блока. Остальные блоки всех таблиц содержат в первых четырех столбцах одну и ту же подтаблицу — таблицу 15.

Сравниваем вторые части подтаблиц всех 4–7 блоков в таблицах 6–9.

Некоторые блоки одной таблицы встречаются в других таблицах, но все четыре блока нигде не повторяются.

Таблица 13

*	*							*						
		*	*					*						
				*	*			*						
						*	*	*						
*		*							*					
	*		*						*					
				*		*			*					
					*		*		*					
*			*							*				
	*	*								*				
				*			*			*				
					*	*				*				
*				*							*			
	*				*						*			
		*					*				*			
			*			*					*			
*					*							*		
	*					*						*		
		*		*								*		
			*				*					*		
*						*							*	
	*						*						*	
		*			*								*	
			*	*									*	
*							*							*
	*			*										*
		*				*								*
			*		*									*
								*	*	*				
								*			*			*
								*				*	*	
									*		*		*	
									*			*		*
										*	*	*		
										*			*	*

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Попарно неизоморфных $\langle 3,4\rangle$-плоскостей не меньше, чем соответствующих им неизоморфных групп N_p^8.*

5. Свойства $\langle 3,4\rangle$-плоскостей

Каждая прямая $\langle 3,4\rangle$-плоскости содержит 3 точки — в каждой строке встречается три знака $*$. Через каждую точку проходит по 7 прямых — в каждом столбце таблицы встречается семь знаков инцидентности. Число всех точек и число всех прямых $\langle m,n\rangle$-плоскости, согласно [1, с. 46], вычисляется соответственно по формулам

$$(m+n)(m-1)+1, \qquad \frac{m+n}{m}\big((m+n)(m-1)+1\big)$$

которые при $m=3$ и $n=4$ дают соответственно 15 и 35, что и выполняется в наших плоскостях.

Таблица 14

*	*							*						
		*	*					*						
				*	*			*						
						*	*	*						
*		*							*					
	*		*						*					
				*		*			*					
					*		*		*					
*			*							*				
	*	*								*				
				*			*			*				
					*	*				*				
*				*							*			
	*					*					*			
		*					*				*			
			*		*						*			
*					*							*		
	*						*					*		
		*				*						*		
			*	*								*		
*						*							*	
	*			*									*	
		*			*								*	
			*				*						*	
*							*							*
	*				*									*
		*		*										*
			*			*								*
								*	*	*				
								*			*			*
								*				*	*	
									*		*		*	
									*			*		*
										*	*	*		
										*			*	*

Так как на прямой лежит точно по 3 точки, то интересно проверить плоскость на дезарговость. У нас плоскости гиперболические, поэтому не всякие прямые конфигурации Дезарга пересекаются. Параллельность прямых на $\langle 3,4\rangle$-плоскостях тоже неопределена. Поэтому плоскости недезарговы. Все-таки, поищем дезарговы конфигурации.

Теорема 2. $\langle 3,4\rangle$*-плоскости содержат дезарговы конфигурации.*

$\triangleleft$ Пусть P_1 центр перспективы, см. таблицу 11. Тройки точек P_6, P_{10}, P_8 и P_9, P_2, P_{15} неколлинеарны; прямые, определяемые парами точек P_6 и P_9, P_{10} и P_2, P_8 и P_{15} проходят через точку P_1. Прямые $P_{10}P_6$ и P_9P_2 содержат точку P_7, прямые $P_{10}P_8$ и P_2P_{15} пересекаются в P_5, прямые P_6P_8 и P_9P_{15} — в точке P_{12}; точки P_7, P_5, P_{12} коллинеарны — это ось перспективы треугольников $P_6P_{10}P_8$ и $P_9P_2P_{15}$. Перечисленные точки и прямые составляют конфигурацию Дезарга.

На рассматриваемой плоскости имеются также и другие конфигурации Дезарга. $\triangleright$

Таблица 15

*			
	*		
		*	
			*

С тем же центром перспективы P_1 рассмотрим треугольники $P_6P_{11}P_2$ и $P_9P_4P_{10}$. Стороны P_6P_{11} и P_9P_4 пересекаются в P_5; стороны $P_{11}P_2$ и P_4P_{10} — в точке P_3. На стороне P_6P_2 лежит еще точка P_{14}, на стороне P_9P_{10} лежит еще точка P_{11}; точки P_{14} и P_{11} не совпадают. На прямой P_5P_3 лежит еще точка P_{14}. Т. е. точки P_5, P_3, P_{14} одной прямой могли бы быть осью перспективы рассматриваемых треугольников, но P_{11} не лежит на этой прямой. Это пример точек и прямых, не составляющих конфигурации Дезарга.

Теорема 3. *На* $\langle 3,4\rangle$*-плоскости существуют неколлинеарные точки, которым перспективны коллинеарные точки.*

$\triangleleft$ Пусть на той же плоскости, таблица 11, P_1 центр перспективы. Точки P_2, P_6, P_4 неколлинеарны. Этим точкам перспективны соответственно точки P_{10}, P_9, P_{11}. Каждая из точек P_{10}, P_9, P_{11} есть третья точка соответствующей прямой P_1P_2, P_1P_6, P_1P_4. Но точки P_{10}, P_9, P_{11} лежат на одной прямой, именно на прямой l_{29}, это верхняя прямая подплоскости Фано рассматриваемой $\langle 3,4\rangle$-плоскости. $\triangleright$

Выполняется более общее утверждение.

Теорема 4. *Для любого центра перспективы* $P_1 - P_8$ *среди точек* $P_1 - P_8$ *имеются неколлинеарные тройки точек, перспективные тройкам точек одной из прямых* $l_{29} - l_{35}$.

$\triangleleft$ На той же плоскости таблицы 11 возьмем центр перспективы P_1 и прямую l_{34}, состоящую из точек P_{11}, P_{12}, P_{13}. Они перспективны точкам P_4, P_3, P_5, см. таблицу инцидентности. По таблице 11 легко найти тройки неколлинеарных точек среди $P_2 - P_8$, перспективных точкам каждой из прямых $l_{29} - l_{35}$ с центром P_1. Это верно для любого центра из множества точек $P_1 - P_8$. $\triangleright$

Теорема 4 верна на любой из рассмотренных $\langle 3,4\rangle$-плоскостей. Теоремы 3 и 4 означают, что выполняется

Теорема 5. *Перспективные соответствия на* $\langle 3,4\rangle$*-плоскостях не являются коллинеациями этих плоскостей.*

Известна теорема Глисона [1, с. 276], что всякая плоскость Фано дезаргова. $\langle 3,4\rangle$-плоскости содержат плоскость Фано в качестве подплоскости. Однако, теорема Глисона на $\langle 3,4\rangle$-плоскости не распространяется, см. теорему 5, согласно которой не для всякого треугольника на плоскости существует перспективный.

Литература

1. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии.—М.: Наука, 1980.—320 с.
2. *Долгарев А. И.* Таблицы связей групп простой экспоненты ступени 2 и регулярные гиперболические $\langle 3, 4\rangle$-плоскости // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докл. XIV Междунар. конф. (Пенза, 23–28 мая 2005 г.).—М.: Изд-во МГУ, 2005.—С. 43.
3. *Долгарев А. И.* Группы простой экспоненты ступени 2 с 8 образующими и латинские квадраты // Изв. вузов. Математика.—2005.—№ 9.—С. 8–18.
4. *Долгарев А. И.* Конечные одулярные плоскости и модулярные решетки // Тезисы докл. Междунар. конф. по алгебре памяти А. И. Ширшова (Барнаул, 20–25 авг. 1991 г.).—Новосибирск, 1991.—С. 38.
5. *Долгарев А. И.* Плоскость группы простой экспоненты // Математика и информатика. Межвузовский сб.—Пенза: ПГПУ, 1996.—С. 3–12.

Статья поступила 17 ноября 2009 г.

Долгарев Артур Иванович
Пензенский государственный университет,
доцент кафедры математики и
суперкомпьютерного моделирования
РОССИЯ, 440026, Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: delivar@yandex.ru

FINITE REGULAR HYPERBOLIC PLANES AND NILPOTENT GROUPS WITH 8 GENERATORS

Dolgarew A. I.

Regular finite hyperbolic plane are obtained for nilpotent groups of step 2 and simple period. Four nonisomorphic $\langle 3, 4\rangle$-plane are constructed. These planes are not Desargues.

Key words: nonisomorphic finite regular hyperbolic plane, not Desargues plane.