Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 17–21

УДК **519.4**

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ НАД ПОЛЕМ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

М. З. Жемухова, У. М. Пачев

В работе дается описание циклических подгрупп полной линейной группы $GL_2(F)$ над произвольным полем F нулевой характеристики.

Ключевые слова: циклическая подгруппа, полная линейная группа, характеристические корни матрицы.

В данной работе дается описание циклических подгрупп полной линейной группы $GL_2(F)$ над любым полем F нулевой характеристики. Тем самым нами дается усиление основного результата из [1], относящегося только к случаю алгебраически замкнутого поля F (и значит, например, случай поля рациональных чисел $F = \mathbb{Q}$ выпадет из рассмотрения).

Итак, пусть F — произвольное поле нулевой характеристики,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F).$$

Характеристическое уравнение матрицы M есть

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0,$$

а ее характеристические корни

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right),$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right).$$

По теореме Гамильтона — Кэли матрица M является корнем ее характеристического уравнения, т. е.

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)E = 0, \tag{1}$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — нулевая матрица.

В силу (1) для любого натурального $n \geqslant 2$ имеем рекуррентное уравнение для степеней матрицы M:

$$M^n = (a+d)M^{n-1} + (bc-ad)M^{n-2}. \tag{2}$$

Если матрица M — вырожденная и, значит, $M \notin GL_2(F)$, $\det M = 0$, то в этом случае из (2) получаем

$$M^n = (a+d)M^{n-1},$$

откуда

$$M^n = (a+d)^{n-1}\, M, \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, в случае вырожденной матрицы M получаем только циклическую полугруппу, которую как и в случае циклических групп обозначим через $\langle M \rangle$. Согласно полученному результату имеем

$$\langle M \rangle = \bigl\{ (2\,\mathrm{Sp}\, M)^{n-1} | \; \forall\, n \in \mathbb{N} \bigr\},$$

где $\mathrm{Sp}\, M = a + d$ — след матрицы $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Пусть теперь $M \in GL_2(F)$, и значит $\det M = ad - bc \neq 0$. Тогда соотношение (2) есть рекуррентное уравнение второго порядка для степеней матрицы M (обычно рекуррентные уравнения встречаются только для числовых последовательностей).

В случае матрицы $M \in GL_2(F)$ наиболее удобное описание циклических подгрупп $\langle M \rangle$ полной линейной группы $GL_2(F)$ получается с помощью характеристических корней матрицы M.

Следуя [1], рассмотрим сначала случай различных характеристических корней $(\alpha \neq \beta)$ матрицы $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Тогда имеем

$$\alpha + \beta = a + d, \quad \alpha\beta = ad - bc,$$

и значит в силу (2) получаем

$$M^n = (\alpha + \beta)\, M^{n-1} + \alpha\beta M^{n-2}, \tag{3}$$

откуда

$$M^n - \beta M^{n-1} = \alpha \left(M^{n-1} - \beta M^{n-2} \right).$$

Следовательно,

$$M^n - \beta M^{n-1} = \alpha^{n-1} \left(M - \beta E \right), \tag{4}$$

где $M^0 = E$ — единичная матрица, и аналогично этому

$$M^n - \alpha M^{n-1} = \beta^{n-1} \left(M - \alpha E \right). \tag{5}$$

Из (4) и (5) для любого натурального n почленным вычитанием находим, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} E. \tag{6}$$

В силу основной теоремы о симметрических многочленах (справедливой для многочленов над целостным кольцом [2]) коэффициенты в (6), на которые умножаются матрицы, принадлежат полю F и поэтому нет необходимости считать поле F алгебраически замкнутым.

Перейдем теперь к случаю кратных характеристических корней матрицы $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, т. е. случаю $\alpha = \beta$. В этом случае в заметке [1] для вычисления M использовался предельный переход при $\beta \to \alpha$, что требует полноту поля F (но это условие опять не выполняется, например, для поля $\mathbb{Q}$). В этом случае наиболее подходящим является рассуждение, использующее индуктивный способ определения M^n.

Итак, в силу (3) при $n = 2$ в случае кратных характеристических корней имеем:

$$M^2 = 2\alpha M - \alpha^2 E.$$

Опираясь на это соотношение, получаем, что

$$M^n = na^{n-1}M - (n-1)\,a^n E. \tag{7}$$

Эту формулу можно записать в явном виде через элементы поля F:

$$M^n = n\left(\frac{a+d}{2}\right)^{n-1} M - (n-1)\left(\frac{a+d}{2}\right)^n E.$$

Формулы (6) и (7) справедливы и при $n < 0$, если учесть, что

$$M^{-m} = \left(M^{-1}\right)^m = (M^m)^{-1} \quad (m \in M).$$

В [1] основной результат о циклических подгруппах $\langle M \rangle$ в случае различных характеристических корней получен при ограничительном условии $n \neq 0$. Это ограничение мы снимаем через использование функции $\operatorname{sgn} n$ — знак числа n. Если обозначим

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то в случае различных характеристических корней получаем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} a - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \\ b_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} b, \\ c_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} c, \\ d_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} d - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Еще более простые выражения получаются для этих элементов в случае кратных характеристических корней, а именно

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na^{n-1}a - (n-1)\,a^n & n\alpha^{n-1}b \\ n\alpha^{n-1}c & n\alpha^{n-1}d - (n-1)\,\alpha^n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{a+d}{2}.$$

Полученный основной результат дает усиление доказанной в [1] теоремы о циклической подгруппе $\langle M \rangle$ полной линейной группы $GL_2(F)$.

Теорема 1. *Циклическая подгруппа $\langle M \rangle$, порожденная любым элементом $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $GL_2(F)$ над полем F нулевой характеристики, определяется равенствами:*

1) $M^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} M^{\operatorname{sgn} n} - \alpha\beta \frac{\alpha^{|n|-1} - \beta^{|n|-1}}{\alpha - \beta} E$, *где* $\alpha \neq \beta$, *— характеристические корни матрицы* M, $\operatorname{sgn}\ n$ *— знак числа* n*;*

2) $M^n = n\alpha^{n - \operatorname{sgn} n} M^{\operatorname{sgn} n} - (|n| - 1)\,\alpha^n E \quad$ *при* $\alpha = \beta = \frac{a+d}{2}$.

Доказанная теорема 1 дает явное описание бесконечных циклических подгрупп полной линейной группы $GL_2(F)$ над произвольным полем F с $\operatorname{char} F = 0$. Но некоторые конечные циклические подгруппы в $GL_2(F)$ могут быть построены, например, в том случае, когда поле $F = K^{(n)}$, где $K^{(n)}$ — n-круговое поле над произвольным полем K нулевой характеристики.

Итак, пусть $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2\left(K^{(n)}\right)$ и ξ — один из первообразных корней n-ой степени из 1_K, где 1_K — единичный элемент поля K. Пусть матрица $M \in GL_2(K^{(n)})$ такова, что ее характеристические корни равны $\xi^m \xi^{-m}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, НОД$\,(m,n) = \delta$.

Если теперь t — порядок элемента ξ^m, то $\xi^{mt} = 1$, откуда получаем следующие условия делимости

$$\frac{n}{\delta}\,\Big|\,\frac{m}{\delta}t \Rightarrow \frac{n}{\delta}\,\Big|\,t\,.$$

Отсюда, ввиду того, что t должно иметь наименьшее возможное значение, следует, что $t = \frac{n}{\delta}$.

Положив теперь в теореме 1 характеристические корни матрицы M равными $\alpha = \xi^m$ и $\beta = \xi^{-m}$, найдем, что $M^{\frac{n}{(m,n)}} = E$, где $(m,n) =$ НОД$\,(m,n)$.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} M^{\frac{n}{(m,n)}} &= \frac{(\xi^m)^{\frac{n}{(m,n)}} - (\xi^{-m})^{\frac{n}{(m,n)}}}{\xi^m - \xi^{-m}} M - \frac{(\xi^m)^{\frac{n}{(m,n)}-1} - (\xi^{-m})^{\frac{n}{(m,n)}-1}}{\xi^m - \xi^{-m}} E \\ &= OM - \frac{\xi^{-m} - \xi^m}{\xi^m - \xi^{-m}} E = E, \end{aligned}$$

при этом учитывалось, что

$$\xi^{m\frac{n}{(m,n)}} = \xi^{-m\frac{n}{(m,n)}} = 1_K, \quad \xi^m - \xi^{-m} \neq 0.$$

Значит, $\langle M \rangle$ — конечная циклическая подгруппа порядка $\frac{n}{(m,n)}$ группы $GL_2(K^{(n)})$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2. *В полной линейной группе $GL_2(K^{(n)})$ над n-круговым полем $K^{(n)}$ произвольного поля K нулевой характеристики существует циклическая подгруппа $\langle M \rangle$ порядка $\frac{n}{(m,n)}$, где матрица M имеет своими характеристическими корнями ξ^m и ξ^{-m}, ξ — первообразный корень степени n из единицы над полем K; $1 \leqslant m \leqslant n$.*

Приведем пример конечной циклической подгруппы в полной линейной группе $GL_2(F)$, где $F = Q(\sqrt[n]{1})$ — круговое поле деления окружности на n равных частей. Тогда для элемента $M \in GL_2(F)$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ -\sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

получаем циклическую подгруппу $\langle M \rangle = \{M^K \,|\, 0 \leqslant K \leqslant n-1\}$, порядка группы $GL_2(F)$.

Представляет большой интерес перенесение полученных результатов на полные линейные группы степени $n > 2$ (см. [6]) и на поля простой характеристики, например, на предельное поле $\Omega_p = \lim_{n\to\infty} Fp^{n!}$, являющееся алгебраически замкнутым полем характеристики p (нужные для этого предварительные сведения можно найти в [3–5]).

Литература

1. *Пачев У. М., Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_2(F)$ // Изв. КБНЦ РАН.—2001.— Т. 7, № 2.—С. 72–74.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.
3. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. 3-е изд.— М.: Наука, 1985.—504 с.
4. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру.—М.: Наука, 1973.—448 с.
5. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. В 2-х т. Т. 1.—М.: Мир, 1988.—430 с.
6. *Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_3(F)$ // Изв. КБНЦ РАН, 2001.—Т. 7, № 2.— С. 75–77.

Статья поступила 27 февраля 2011 г.

Жемухова Майя Залимовна
Кабардино-Балкарский государственный университет,
старший преподаватель кафедры геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175

Пачев Урусби Мухамедович
Кабардино-Балкарский государственный университет,
доцент кафедры геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: urusbi@rambler.ru

CYCLIC SUBGROUPS OF SECOND DEGREE FULL LINEAR GROUP OVER A FIELD OF THE ZERO CHARACTERISTIC

Zhemuhova M. Z., Pachev U. M.

A description of cyclic subgroups in a full linear group $GL_2(F)$ over any zero characteristic field F is given.

Key words: cyclic subgroup, full linear group, characteristic roots of a matrice.