Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 53–63

УДК **512.667.7+512.554.32**

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЯНГИАНА СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{sl}(1,2)$[1]

В. А. Стукопин

Описаны конечномерные неприводимые представления янгиана супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$. Сформулирован и доказан критерий конечномерности неприводимого представления.

Ключевые слова: Янгиан супералгебры Ли, неприводимое представление, многочлен Дринфельда, простой модуль.

Введение

Описание неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли является важной задачей для теории точно-решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. С точки зрения теории янгианов конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения. Вычисление спектра гамильтониана и корреляционных функций также может быть проведено на основе теории представлений янгианов при использовании формулы для универсальной R-матрицы. Поэтому теория представлений янгианов простых и редуктивных алгебр Ли является достаточно развитой наукой, которая начала развиваться еще до появления самого термина — янгиан. В противоположность этому теория янгианов супералгебр Ли является относительно молодой дисциплиной, первые результаты в которой были получены во второй половине 90-х гг. К настоящему времени число приложений теории янгианов супералгебр Ли значительно выросло, в частности, прояснилась связь с квантовой теорией суперструн, а также с теорией калибровочных полей Янга — Миллса, играющих важнейшую роль в современной фундаментальной физике (см. [1, 9, 18]).

В данной работе исследуются представления янгианов супералгебр Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$ (см. [17, 19]). Основным результатом является теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$. Классификация неприводимых представлений янгиана полной линейной алгебры $\mathfrak{gl}(n,m)$ получена ранее в работах [22, 23]. Следует отметить, что теория представлений супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(m,n)$ отличается от теории представлений простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ наличием наряду с так называемыми типичными представлениями еще атипичных представлений. Эта патология находит свое отражение и в теории представлений янгианов супералгебр Ли $\mathfrak{sl}(m,n)$. В этой работе мы ограничиваемся простейшим случаем супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$ наиболее близкой по свойствам к простой алгебре Ли типа $\mathfrak{sl}(2)$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00671-а, и Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П1116.

Отметим, что янгианы, наряду с квантованными универсальными обертывающими алгебрами и квантовыми эллиптическими алгебрами, являются одним из трех наиболее важных примеров квантовых алгебр. Само понятие янгиана было введено В. Г. Дринфельдом для случая простых алгебр Ли в середине 80-х гг. прошлого века (см. [3, 4]), хотя изоморфные янгиану алгебры использовались при исследовании точно решаемых моделей квантовой теории поля и ранее, в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния (см. [20, 21]). В настоящее время янгианы простых и редуктивных алгебр Ли исследованы достаточно хорошо (см. монографии [6, 10]). Янгианы супералгебр Ли начали изучаться с начала 90-х гг. прошлого века (см. [11, 15]).

Важным следствием результатов данной работы, а также работ [12, 13], было бы получение классификации квантовых R-матриц (в случае янгианов простых алгебр Ли соответствующие квантовые R-матрицы описаны в [8]). Этому вопросу, а также более детальному описанию неприводимых представлений, автор надеется посвятить отдельную работу.

Несколько слов об организации данной работы. В первом параграфе мы вводим главное действующее лицо — янгиан базисной супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$. Мы даем его описание в терминах токовой системы образующих и соотношений, следуя работе автора [11]. В § 2 мы напоминаем конструкцию базиса Пуанкаре — Биркгофа — Витта (PBW базиса) (см. [11]). В § 3 мы также для удобства читателя напоминаем основные определения, относящиеся к представлениям янгианов. Здесь же мы формулируем и доказываем основной результат работы.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения. Через $\mathbb{C}$ будем обозначать поле комплексных чисел, $M_n(K)$ — кольцо $N\times N$-матриц с элементами из кольца K; через $K[u]$, $K[[u]]$ — кольцо многочленов, соответственно, формальных степенных рядов, с коэффициентами из кольца K, Z_+ — множество неотрицательных целых чисел.

1. Определение янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$

Мы сначала напомним определение янгиана $A(m,n)$ в частном случае $m=0$, $n=1$, отсылая за более подробным и общим изложением к работе [11]. Янгиан, как и другие квантовые алгебры, определяется как результат деформации в классе алгебр Хопфа универсальной обертывающей алгебры, которая в случае янгиана, является универсальной обертывающей алгебры Ли полиномиальных токов со значениями в простой алгебре Ли (супералгебре Ли). В работе [11] показано, что такое определение эквивалентно другому определению, использующему так называемую *токовую систему образующих.* Эта система образующих особенно удобна при рассмотрении представлений янгианов. Поэтому мы рассмотрим ее в первую очередь.

Мы также отдельно рассмотрим случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(1,2)=A(0,1)$. Напомним определение супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)=A(0,1)$. Это базисная супералгебра Ли, порожденная образующими $h_1, h_2, x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, x_3^{\pm}=[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]$. Матрица Картана, задающая систему определяющих соотношений, имеет следующий вид:

$$A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Сама же система определяющих соотношений выглядит следующим образом:

$$[h_i,h_j]=0,\quad i=1,2; \tag{1.1}$$

$$[h_i,x_j^{\pm}]=\pm a_{ij}x_j^{\pm},\quad i,j=1,2; \tag{1.2}$$

$$[h_1, x_1^{\pm}] = 0, \quad [h_1, x_2^{\pm}] = \pm x_2^{\pm}, \quad [h_2, x_1^{\pm}] = \mp x_1^{\pm}, \quad [h_2, x_2^{\pm}] = \pm 2x_2^{\pm}; \tag{1.3}$$

$$[h_1, x_3^{\pm}] = \mp x_3^{\pm}, \quad [h_2, x_3^{\pm}] = \mp 3x_3^{\pm}; \tag{1.4}$$

$$[x_1^{\pm}, [x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]] = [x_1^{\pm}, x_3^{\pm}] = [x_2^{\pm}, x_3^{\pm}] = [x_1^{\pm}, [x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]] = 0; \tag{1.5}$$

$$[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_j, \ i = 1, 2, \quad [x_3^{+}, x_3^{-}] = h_1 + h_2. \tag{1.6}$$

Отметим, что образующие $x_1^{\pm}$ — нечетные, а остальные образующие — четные, т. е. $p(x_1^{\pm}) = 1$, $p(x_2^{\pm}) = p(h_1) = p(h_2) = 0$, где p — функция четности (см. [17]). Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$. Напомним теперь определение янгиана $Y(\mathfrak{g}) = Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ (см. [11]).

Определение 1.1. Пусть $Y(\mathfrak{g})_{\hbar}$ (см. [11]) супералгебра (над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$), порожденная образующими $h_{i,k}$, $x_{i,k}^{\pm}$, $i \in I = \{1,2\}$, $k \in Z_+$ ($p(x_{1,k}^{\pm}) = 1$, $p(x_{2,k}^{\pm}) = p(h_{1,k}) = p(h_{2,k}) = 0$, $k \in Z_+$), которые удовлетворяют соотношениям из определения 2 работы [11], а именно следующим соотношениям:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \tag{1.7}$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x_{i,k}^{+}, x_{j,l}^{-}], \tag{1.8}$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^{\pm}] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^{\pm}] + \frac{a_{ij}}{2}\hbar(h_{i,k} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} h_{i,k}), \tag{1.9}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,l}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,l}^{\pm}, \tag{1.10}$$

$$[x_{i,k+1}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}] = [x_{i,k}^{\pm}, x_{j,l+1}^{\pm}] + \frac{a_{ij}}{2}\hbar(x_{i,k}^{\pm} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} x_{i,k}^{\pm}), \tag{1.11}$$

$$[x_{1,k_1}^{\pm}, [x_{1,k_2}^{\pm}, x_{2,j}^{\pm}]] + [x_{1,k_2}^{\pm}, [x_{1,k_1}^{\pm}, x_{2,j}^{\pm}]] = [x_{2,k_1}^{\pm}, [x_{2,k_2}^{\pm}, x_{1,j}^{\pm}]] + [x_{2,k_2}^{\pm}, [x_{2,k_1}^{\pm}, x_{1,j}^{\pm}]] = 0. \tag{1.12}$$

Отметим, что $Y(\mathfrak{g})_{\hbar}$ является также алгеброй Хопфа, в которой закон коумножения задается следующими формулами:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

$$\Delta(x_{i,1}^{+}) = x_{i,1}^{+} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^{+} + \hbar\Bigl(h_{i,0} \otimes x_{i,0}^{+} - \sum_{\gamma \in \Delta_+} x_{\gamma}^{-} \otimes [x_{\alpha_i}^{+}, x_{\gamma}^{+}]\Bigr),$$

$$\Delta(x_{i,1}^{-}) = x_{i,1}^{-} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^{-} + \hbar\Bigl(x_{i,0}^{-} \otimes h_{i,0} - \sum_{\gamma \in \Delta_+} [x_{\alpha_i}^{-}, x_{\gamma}^{-}] \otimes x_{\gamma}^{+}\Bigr),$$

$$\Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + \hbar\Bigl(h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \sum_{\gamma \in \Delta_+} (\alpha_i, \gamma) x_{\gamma}^{-} \otimes x_{\gamma}^{+}\Bigr).$$

Легко проверить, что при различных $\hbar$, не равных 0, супералгебры Хопфа $Y(\mathfrak{g})_{\hbar}$ изоморфны.

Янгианом $Y(\mathfrak{g})$ будем называть супералгебру Хопфа $Y(\mathfrak{g})_1$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Введем следующие производящие функции образующих янгиана:

$$h_i(u) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k}\, u^{-k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} h_{i,k}\, u^{-k-1}, \quad i = 1, 2, \tag{1.13}$$

$$x_i^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^{\pm}\, u^{-k-1}, \quad i = 1, 2. \tag{1.14}$$

Легко проверить, что соотношение (1.9) эквивалентно следующему соотношению для производящих функций:

$$[h_i(u), x_j^{\pm}(t)] = \mp\frac{a_{ij}}{2}\,\frac{\Big(h_i(u)\big(x_j^{\pm}(t) - x_j^{\pm}(u)\big) + \big(x_j^{\pm}(t) - x_j^{\pm}(u)\big)h_i(u)\Big)}{(u-t)}. \tag{1.15}$$

2. Корневые образующие. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта

В этом пункте мы сформулируем теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ-теорему) для янгиана супералгебры Ли. Этот результат — квантовый аналог соответствующей теоремы для универсальных обертывающих алгебр (см. [2, 6]). В обоих случаях конструируется некий бесконечный линейный базис (т. е. базис в векторном пространстве).

Будем называть *степенью образующих* $a_{i,k}, a_{i,k} \in \{x_{i,k}^{+}, x_{i,k}^{-}, h_{i,k}\}$ их второй индекс. *Степенью монома* от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. *Степенью многочлена от образующих* будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g})$ степени не выше чем k через $Y_k = Y_k(\mathfrak{g})$. Получаем на $Y(\mathfrak{g})$ фильтрацию

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$. Пусть α_1 — нечетный корень и Δ_+ — множество положительных корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. В случае супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$ множество положительных корней $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$. Определим на Δ_+ так называемый выпуклый порядок формулой $\alpha_1 \prec \alpha_3 \prec \alpha_2$.

Пусть $\overline{(i,m)} = (i_1, m_1, i_2, m_2, i_3, m_3)$ — вектор, $|\overline{(i,m)}| = \sum_{j=1}^{3}(i_j\, m_j)$ — сумма компонент этого вектора. Пусть Y_- — ассоциативная подалгебра янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, порожденная образующими

$$\Big\{x_{1,k}^{-} = x_{\alpha(1),k}^{-},\ x_{2,l}^{-} = x_{\alpha(3),l}^{-},\ x_{\alpha_3,m}^{-} = x_{\alpha(2),m}^{-},\ k,l,m \in Z_+\Big\}.$$

Опишем упорядоченные базисы в янгиане $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, а также в Y_-, как в векторных пространствах, т. е. базисы Пуанкаре — Биркгофа — Витта (PBW-базисы).

Пусть $\overline{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $k_i \geqslant 0$, $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$, $m_3 \geqslant 0$, $m_1, m_2 \in 0,1$; $\overline{s} = (s_1, s_2)$, $s_1, s_2 \geqslant 0$; $\overline{p} = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \geqslant 0$; $\overline{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $r_i \geqslant 0$; $\overline{t} = (t_1, t_2, t_3)$, $t_3 \geqslant 0$, $t_1, t_2 \in 0, 1$, — векторы. Пусть также

$$\begin{aligned} x\big(\overline{k}, \overline{m}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t}\big) = {} & \big(x_{\alpha(1),k_1}^{+}\big)^{m_1}\big(x_{\alpha(2),k_1}^{+}\big)^{m_2}\big(x_{\alpha(3),k_N}^{+}\big)^{m_3}(h_{1,s_1})^{p_1} \\ & \times (h_{2,s_2})^{p_2}\big(x_{\alpha(1),r_1}^{-}\big)^{t_1}\big(x_{\alpha(2),r_2}^{-}\big)^{t_2}\big(x_{\alpha(3),r_3}^{+}\big)^{t_3}. \end{aligned}$$

На множестве векторов $\{x(\overline{k}, \overline{m}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t})\}$ определим лексикографический порядок относительно аргументов.

Пусть, как и выше, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ (α_1, α_2 — простые корни). Пусть $x_{1,k_1}^{\pm}, x_{2,k_2}^{\pm} \in Y(\mathfrak{g})$, $k = k_1 + k_2$. Определим корневые векторы формулами

$$x_{\alpha_3,k}^{\pm} = \left[x_{1,k_1}^{\pm}, x_{2,k_2}^{\pm}\right].$$

Нетрудно проверить, что если (k_1', k_2') — другое разложение числа k, то $x^{\pm}_{\alpha_3,k} = [x^{\pm}_{1,k_1'}, x^{\pm}_{2,k_2'}]$ по модулю членов меньшей степени, т. е. по модулю Y_{k-1}.

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (т. е. по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k-1}$ коммутационные соотношения в $\oplus_{k=1}^{\infty} Y(\mathfrak{g})_k / Y(\mathfrak{g})_{k-1} \oplus Y(\mathfrak{g})_0$ аналогичны коммутационным соотношениям универсальной обертывающей алгебры Ли токов $U(\mathfrak{g}[t])$.

Мы предполагаем, что введен определенный выше отображением α линейный порядок на множестве корней Δ и обозначим через Ω множество упорядоченных мономов от x_α, h_i, $\alpha \in \Delta$, $i \in I$. Мы используем обозначение $x_\alpha = x^+_\alpha$, $x_{-\alpha} = x^-_\alpha$, $\alpha \in \Delta_+$.

Теорема. $(\Omega, \prec)$ — *базис Пуанкаре — Биркгофа — Витта в янгиане* $Y(\mathfrak{g})$.

$\lhd$ Доказательство теоремы см. [11]. $\rhd$

3. Представления янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$

Определение. Пусть V — модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$, $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$, $i \in I$, $r \in Z_+$, — набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть *весовым подпространством модуля* V, подпространство

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V : h_{i,r}v = d_{i,r}v\}. \tag{3.1}$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть *весом янгианного модуля.*

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

Будем называть вектор $v \in V$ *примитивным*, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x^{\pm}_{i,r}v = 0$ для всех $i \in I$, $r \in Z_+$.

Будем также называть модуль V *модулем со старшим весом*, если он порождается примитивным вектором, т. е. $V = Y(\mathfrak{sl}(1,2))v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}$.

Покажем сначала, что каждое конечномерное представление янгиана супералгебры Ли типа $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ обладает старшим вектором.

Отметим, что каждый модуль со старшим весом может быть построен как фактор *модуля Верма.* Модуль же Верма $M(\bar{d})$ может быть сконструирован обычным образом как фактор-модуль янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ по идеалу, порожденному векторами $x^+_{i,r}$ и векторами $h_{i,k} - d_{i,k} \cdot 1$. Роль старшего вектора играет единица янгиана 1. Ввиду вложения $U(\mathfrak{sl}(1,2)) \subset Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, каждый $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль можно рассматривать как $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль. Рассмотрим вес $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i h_{i,0}$, где λ_i, $i = 1, 2$, — фундаментальные веса супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$. Тогда весовое подпространство янгианного модуля Верма с таким весом одномерно. Можно показать, что отсюда вытекает, что модуль Верма имеет единственный неприводимый фактор-модуль, обозначаемый обычно $V(\bar{d}) = M(\bar{d})/N(\bar{d})$, где $N(\bar{d})$ — максимальный подмодуль модуля $M(\bar{d})$.

Предложение 1. *Каждое конечномерное неприводимое представление янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ (неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль) V содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) старший вектор v.*

Доказательство этого предложения основано на следующей лемме. Пусть

$$V_0 = \{v \in V : x^+_{i,k}v = 0,\ k \in Z_+\}.$$

Лемма 1. 1) $h_{i,k}V_0 \subset V_0$; 2) $V_0 \neq 0$.

$\lhd$ Пусть $v \in V_0$. Тогда $x^+_{i,k}h_{j,l}v = h_{j,l}x^+_{i,k}v - [h_{i,l+1}, x^+_{i,k-1}]v + \frac{1}{2}(h_{j,l}x^+_{i,k-1} + x^+_{i,k-1}h_{j,l})v$. Переставляя образующие $x^+_{i,s}$ и $h_{j,r}$ при помощи коммутационных соотношений (определяющих соотношений янгиана), получим, что $x^+_{i,k}h_{j,l}v = 0$. Другими словами, $h_{j,l}v \in V_0$ для $v \in V_0$ и п. 1) леммы доказан.

2) Пусть $v' \in V_0$. Начинаем действовать на вектор v' элементами PBW-базиса. Рассмотрим сначала случай $m = n = 1$, т. е. случай $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$, а после общий случай. В случае $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$ обязательно найдется такое $m \in \{0,1\}$, что $(x^+_0)^m v' \neq 0$, $(x^+_0)^{m+1}v' = 0$. Пусть $v_2 = (x^+_0)^m v'$. Начинаем действовать элементами PBW базиса в соответствии с выбранным порядком на этом базисе. Ясно, что найдется такое r, что $v_r = (x^+_r)^{p_r} \dots (x^+_0)^{p_0} v \neq 0$ ($p \in \{0,1\}$), но $x^+_t v_r = 0$ для любых $t \in Z_+$. Ясно, что $v_r \in V_0$. Поэтому $V_0 \neq \{0\}$. $\rhd$

Рассмотрим теперь случай $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$. Рассмотрим линейный порядок на векторах PBW базиса, лежащих в Y_+. Обозначим векторы этого базиса через $\{x^+(j)\}_{j=0}^\infty$, причем $x^+(j) \prec x^+(l)$ при $j < l$. Найдется такое натуральное число $m \in Z_+$, что $x^+(m)v' \neq 0$, но $x^+(m+1)v' = 0$ для $v' \in V_0$.

Лемма 2. *V_0 — одномерное подпространство (т. е. любые два вектора из V_0 пропорциональны).*

$\lhd$ Пусть $v', v'' \in V_0$, $v' \neq v''$. Тогда, действуя на каждый из них янгианом $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, получаем два подмодуля $Y(\mathfrak{sl}(1,2))v'$ и $Y(\mathfrak{sl}(1,2))v''$ модуля V. Последнее противоречит неприводимости модуля V в случае, когда векторы v', v'' — непропорциональны. $\rhd$

Легко видеть, что предложение 1 вытекает из лемм 1, 2.

Введем теперь класс модулей со старшим весом — аналоги модулей Верма. Пусть $V_0 = Cv^\Lambda_+$ — одномерное векторное пространство, Y^+_0 — подсупералгебра янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, порожденная образующими $x^+_{i,k}$, $i \in \{1,2\}$, $k \in Z_+$; $Y^0_0 = \langle h_{i,k} : i \in I, k \in Z_+\rangle$ — линейная оболочка образующих $\{h_{i,k} : i \in I = \{1,2\}, k \in Z_+\}$; $Y^+ = Y^+_0 Y^0_0$. Пусть также $h_{i,k}v^\Lambda_+ = d_{i,k}v^\Lambda_+$, $Y^+_0 v^\Lambda_+ = 0$. Наряду с обозначением $\bar{d}$ мы будем также использовать обозначение $\Lambda = \bar{d}$, чтобы подчеркнуть аналогию со старшими весами модулей супералгебр Ли, кроме того, для краткости будем использовать для старшего вектора обозначение $v_+ = v^\Lambda_+$. Заметим, что V_0 является одномерным $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модулем. Определим теперь свободный модуль M_Λ со старшим весом Λ формулой

$$M_\Lambda = Y(\mathfrak{g}) \otimes_{Y^+} v^\Lambda_+. \tag{3.2}$$

Очевидно, что как векторное пространство M_Λ изоморфно $Y^-_0 \otimes v^\Lambda_+ : M_\Lambda \cong Y^-_0 \otimes v^\Lambda_+$. Мы будем для краткости писать $x^-_{i,k}v^\Lambda_+$ вместо $x^-_{i,k} \otimes v^\Lambda_+$. Ясно, что модуль M_Λ бесконечномерен. Стандартные рассуждения показывают, что модуль M_Λ содержит максимальный подмодуль N_Λ. Тогда модуль $V_\Lambda = M_\Lambda/N_\Lambda$ — неприводимый модуль со старшим весом Λ. Используя стандартные методы теории представлений, можно показать, что любые два модуля с одинаковым старшим весом изоморфны (сравним, например, с [2]).

Итак, нами доказана следующая

Теорема. *Для любого старшего веса $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ существует единственный неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ.*

Зададим на модуле $M(\bar{d})$ следующие две фильтрации. Так как модуль $M(\bar{d})$ как векторное пространство естественно изоморфен $(Y(\mathfrak{sl}(1,2)_-)_k$, зададим сначала эти фильтрации на $(Y(\mathfrak{sl}(1,2)_-)_k$, а потом, используя этот естественный изоморфизм, перенесем их на $M(\bar{d})$. Эти фильтрации определяются заданием степеней, являющихся сужением степеней d_1, d_2 соответственно. Пусть $(Y(\mathfrak{sl}(1,2)_-)_k$, соответственно, $(Y(\mathfrak{sl}(1,2))_-)^k$, линейная оболочка мономов степени не выше k. Степень монома будем считать равной сумме степеней образующих, произведением которых он является. Степень же образующей в первом случае положим равной значению ее второго индекса, а во втором случае — на единицу больше значения ее второго индекса. Пусть $Y(\mathfrak{sl}(1,2))_k = \{x \in Y(\mathfrak{sl}(1,2)) : d_1(x) \leqslant k\}$, а $Y(\mathfrak{sl}(1,2))^k = \{x \in Y(\mathfrak{sl}(1,2)) : d_2(x) \leqslant k\}$. Будем рассматривать сужения этих фильтраций на $Y(\mathfrak{sl}(1,2))_-$. Таким образом, получаем две фильтрации на $Y(\mathfrak{g})_- = Y(\mathfrak{sl}(1,2)_-$:

$$C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_1 \subset \ldots \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_k \subset \ldots, \tag{3.3}$$

$$\{0\} \subset C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^1 \subset \ldots \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^k \subset \ldots \tag{3.4}$$

Пусть $M(\bar{d})_k = (Y(\mathfrak{g})_-)_k v^{\bar{d}}$, соответственно, $M(\bar{d})^k = (Y(\mathfrak{g})_-)^k v^{\bar{d}}$. Так как неприводимый модуль $V(\bar{d})$ является фактор-модулем модуля Верма $M(\bar{d})_k$, то определенные выше фильтрации задают фильтрации и на неприводимом модуле $V(\bar{d})$. Следует отметить, что эти фильтрации различны по своим свойствам. Правда, фильтрующее пространство первой фильтрации с индексом k содержит все фильтрующие пространства второй фильтрации с индексами, по меньшей мере, до порядка $k+1$ включительно.

Опишем теперь условия конечномерности неприводимого модуля со старшим весом. Обозначим через $\bar{B}_{1,n}$, $\bar{B}_{2,n}$ линейные оболочки следующих векторов:

$$\bar{B}_{1,n} := \left\langle (x^-_{1,k_1})^t \cdot \ldots \cdot x^-_{1,k_r} v_+ : (k_1+1) + \ldots + (k_r+1) \leqslant n \right\rangle,$$

$$\bar{B}_{2,n} := \left\langle (x^-_{2,k_1})^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^-_{2,k_r})^{y_r} v_+ : t_1(k_1+1) + \ldots t_r(k_r+1) \leqslant n \right\rangle.$$

Лемма 3. *Если $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+1}$, то и $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+k}$ для произвольного натурального $k \in \mathbb{N}$.*

$\lhd$ Пусть $a \in \bar{B}_{1,n}$. Покажем сначала, что любой вектор из $\bar{B}_{1,n+k}$ можно представить как образ $\bar{B}_{1,n}$ при действии картановской подалгебры $\mathfrak{h} = \langle h_{1,k}, h_{2,k} : k \in Z_+\rangle$, именно $\bar{B}_{1,n+k} \subset \mathfrak{h}\bar{B}_{1,n}$. При $k=1$ этот факт вытекает из условия леммы.

Пусть теперь $k=2$. Нам потребуется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} h_{i,1}x^-_{j,n}v_+ &= x^-_{j,n}h_{i,1}v_+ + [h_{i,1}, x^-_{j,n}]v_+ = x^-_{j,n}h_{i,1}v_+ + [h_{i,0}, x^-_{j,n+1}]v_+ \\ &+ \frac{a_{i,j}}{2}(h_{i,0}x^-_{j,n} + x^-_{j,n}h_{i,0})v_+ = d_{i,1}x^-_{j,n}v_+ + a_{i,j}x^-_{j,n+1}v_+ + \frac{a_{i,j}}{2}(h_{i,0}x^-_{j,n} + x^-_{j,n}h_{i,0})v_+ \\ &= a_{i,j}x^-_{j,n+1}v_+ + \left(d_{i,1} + \frac{a_{i,j}}{2}(a_{i,j} + 2d_{i,0})\right)x^-_{j,n}v_+. \end{aligned}$$

Используя это соотношение, докажем лемму. Пусть $a \in \bar{B}_{1,n+2}$. Тогда $a = \sum_{s=1}^r x^-_{i_s,k_s} b_s v_+$. Представим элемент a в виде

$$a = \sum_{s=1}^r a^{-1}_{i_s-1,i_s}[h_{i_s-1,1}, x^-_{i_s,k_s-1}]b_s v_+. \tag{3.5}$$

Используя несколько раз приведенные выше два коммутационных соотношения, можно представить элемент a в виде суммы элементов из $\bar{B}_{1,n+1}$ и произведения $x^-_{1,1}$ и элемента из $\bar{B}_{1,n+1}$. Так как каждый элемент из $\bar{B}_{1,n+1}$ содержится в $\bar{B}_{1,n}$ последовательно получаем, что $a \in \bar{B}_{1,n+1}$ и, следовательно, в силу условия леммы, $a \in \bar{B}_{1,n}$. $\rhd$

Пусть теперь $x^-(n) = x^-_{1,k_1} \ldots x^-_{1,k_r}$, $k_1 + \ldots + k_r = n$, $k_r < \ldots < k_1$.

Лемма 4. 1) *Если вектор $x^-(n+1)v_+ \in \bar{B}_{1,n}$, то и вектор $x^-(n+k+1)v_+ \in \bar{B}_{1,n}$ для произвольного $k \in Z_+$.*

2) *Если $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+1}$, то и $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+k}$ для произвольного натурального числа k.*

$\lhd$ Отметим, что пп. 1) и 2) эквивалентны. Докажем п. 1). Доказательство проведем по индукции. В доказательстве мы будем использовать картановские образующие $h_{i,1}$, $h_{i,2}$, $i \in \{1,2\}$. Индукцию проведем по k. При $k = 1$ утверждение является следствием условия. Предположим, что утверждение справедливо при $k = m$, докажем его справедливость при $k = m+1$. Идея доказательства основана на том, что мы покажем, что: a) картановские образующие переводят векторное пространство $\bar{B}_{1,n+m}$ в себя; b) каждый моном PBW базиса, указанного в формулировке вида, лежащий в $\bar{B}_{1,n+m+1}$, может быть получен в виде линейной комбинации образов мономов PBW базиса, указанного в формулировке теоремы вида, при действии картановских образующих $h_{i,1}$, $h_{i,2}$, $i \in \{1,2\}$, а также элементов PBW базиса, уже лежащих в $\bar{B}_{1,n+m}$. Отметим, что из пп. 1), 2) легко вытекает доказываемое утверждение. Действительно, так как каждый моном из $\bar{B}_{1,n+m+1}$, указанного вида, может быть получен действием картановских образующих $h_{i,1}$, $h_{i,2}$ на мономы из $\bar{B}_{n+m}$, указанного вида, и комбинацией мономов из $\bar{B}_{n+m}$, то, следовательно, лежит в $\bar{B}_{1,n+m}$. Но по индукционному предположению мономы из $\bar{B}_{1,n+m}$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций мономов из $\bar{B}_{1,n}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать пп. a), b), которые проверяются по индукции с использованием коммутационных соотношений в янгиане.

Пусть сначала $n = 1$. Тогда получаем, что $x^-(1) \in B_{1,1}$. Следовательно, $x^-(1) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{0,k} x_0^-(\bar{k})$. Прокоммутируем левую и правую части с элементом $h_{2,1}$. При этом степени мономов увеличатся на 1, а число этих мономов также, вообще говоря, увеличится. Сумма этих мономов является линейной комбинацией мономов меньших степеней (степени $n+k$), каждый из которых по индукционному предположению также является линейной комбинацией мономов степени n. $\rhd$

Лемма 5. 1) *Имеют место строгие вложения* $B_{i,k} \subset B_{i,k+1}$ *для любых* $k < n_i$, $k \geqslant 0$, $i = 1,2$;

2) $B_{i,n_i} = B_{i,n_i+1} = \dots$

$\lhd$ Случай $i = 2$ вытекает из результатов, относящихся к представлениям янгиана $Y(\mathfrak{sl}(2))$ [4, 20], п. 1 следует по существу из определений, п. 2) вытекает из предыдущей леммы в случае $i = 1$. $\rhd$

Главный результат работы — следующая теорема.

Теорема. 1) *Каждый неприводимый конечномерный* $Y(A(0;1))$*-модуль* V *является модулем со старшим весом* d: $V = V(d)$.

2) *Модуль* $V(\Lambda)$ *конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены* P_2^d, *а также многочлены* P_1^d, Q_1^d, *удовлетворяющие следующим условиям:*

a) *все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными* 1;

b)

$$\frac{P_2^d(u+1)}{P_2^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2,k} u^{-k-1}, \tag{3.6}$$

$$\frac{P_1^d(u)}{Q_1^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} u^{-k-1}. \tag{3.7}$$

$\lhd$ Пункт 1) теоремы уже доказан. Докажем п. 2) теоремы используя доказанные выше леммы.

Пусть, как и выше, $x_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^- u^{-k-1}$, $i = 1,2$. Из доказанных выше лемм вытекает, что $x_i^-(u)v_+ = \sum_{m=0}^{N} \beta_m^i(u) v_{i,m}$, где $\{v_{i,m}\}$ образуют базис в $\bar{B}_{i,n}$, $i = 1,2$. Ниже мы получим явный вид для $\beta_m^i(u)$. Для краткости мы будем писать $\beta_m(u)$ вместо $\beta_m^1(u)$.

Здесь следует отметить, что вид $\beta_m^2(u)$, равно как и все другие результаты, относящиеся к четным корневым образующим, хорошо известны, они вытекают из результатов, относящихся к описанию неприводимых представлений янгиана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, полученных впервые в [20] (см. также [4, 5, 7, 21]). Поэтому мы подробно остановимся на доказательстве соотношения (3.7), относящегося к нечетной части янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$.

Нам потребуются соотношения (1.15) в следующем частном случае:

$$[h_2(u), x_1^-(t)] = \frac{\Big(h_2(u)\big(x_1^-(t) - x_1^-(u)\big) + \big(x_1^-(t) - x_1^-(u)\big)h_2(u)\Big)}{(u-t)}, \tag{3.8}$$

$$[h_1(u), x_1^-(t)] = 0. \tag{3.9}$$

Пусть $v_{1,k} = x_{1,k}^- v_+$. Тогда, в силу леммы 4, имеет место следующее представление:

$$x_1^-(u)v_+ = \sum_{i=0}^{N} \beta_i(u) v_{1,i}. \tag{3.10}$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ = \sum_{k=0}^{N} x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=N+1}^{\infty} x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+$$
$$= \sum_{k=0}^{N} x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=0}^{N} u^{-N-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_k^i u^{-i-1} v_{1,k}.$$

Обозначим

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_k^i u^{-i-1}, \quad \tilde{\varphi}_k(u) = u^{-k-1} + \varphi_k(u).$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\varphi_k^{i+1} - \varphi_{k-1}^i - \varphi_N^i\, \varphi_k^0 = 0, \quad k \geqslant 0, \tag{3.11}$$

$$\varphi_0^{i+1} - \varphi_N^i\, \varphi_0^0 = d_{1,n+k+1} - \sum_{j=0}^{N} \varphi_j^i\, d_{1,j}. \tag{3.12}$$

Докажем эти соотношения. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_i^k u^{-k-1}, \tag{3.13}$$

$$\delta_i(u) = 1 + u^{i-N} \varphi_i(u). \tag{3.14}$$

Тогда соотношения (3.11), (3.12) можно переписать следующим образом в терминах производящих функций:

$$u\varphi_i(u) - \varphi_i(u) = \varphi_N(u)\, \varphi_i^0, \quad k \geqslant 0, \tag{3.15}$$

$$u\varphi_0(u) - \varphi_N(u)\varphi_0^0 = u^N d_1(u) - \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(u) d_1(u) u^{j+1}. \tag{3.16}$$

Пусть

$$\beta_i(u) = u^{-i}\delta_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Тогда нетрудно показать, что для некоторых матриц

$$A^k(u) = (A^k_{i,j})^N_{i,j=1}(u) \in M_N(C[[u^{-1}]]), \quad k = 1, 2,$$

имеет место равенство

$$h_k(u)x^-(t)v_+ = \sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant N} A^k_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{1,i}. \tag{3.17}$$

Рассматривая совместно соотношения (3.17) и (3.8–3.9), получаем соотношения

$$\begin{gathered}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} A^2_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{1,i} = x^-_1(t)\bar{d}_2(u)v_+ \\ + \frac{(h_2(u)(x^-_1(t) - x^-_1(u)) + (x^-_1(t) - x^-_1(u))h_2(u))}{(u-t)}v_+;\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} A^1_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{1,i} = x^-_1(t)\bar{d}_1(u). \tag{3.19}$$

Эти соотношения можно переписать как линейные рекуррентные соотношения, зависящие от набора произвольных констант. Полученные из них соотношения после несложных преобразований и дают соотношение (3.7). ▷

Литература

1. *Arutyunov G., Frolov S.* Foundations of the $AdS_5 \times S5$ superstring: I // J. Phys. A 42: 254003 Math. Theor.—2009.—arXiv: hep-th/0901.4937.
2. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.—М.: Наука, 1978.
3. *Drinfeld V.* Quantum groups // Proc. Int. Cong. Math.—1988.—Vol. 1.—P. 789–820.
4. *Дринфельд В. Г.* Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга — Бакстера // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 283, № 5.—С. 1060–1064.
5. *Дринфельд В. Г.* Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 36.—С. 212–216.
6. *Chari V., Pressley A.* A guide to quantum groups.—Cambridge: Camb. Univ. Press, 1995.—651 c.
7. Chari V., Pressley A. Yangians and R-matrices // L'Enseignment Math.—1990.—Vol. 36.—P. 267–302.
8. Chari V., Pressley A. Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices // J. Reine Angew. Math.—1991.—Vol. 417.—P. 87–128.
9. *Dolan L., Nappi Ch., Witten E.* Yangian Symmetry in $D = 4$ Superconformal Yang — Mills theory.—2004.—arXiv: hep-th/0401243.
10. *Molev A.* Yangians and their applications.—arXiv: math. QA/0211288.
11. Стукопин В. А. О янгианах супералгебр Ли типа $A(m, n)$ // Функциональный анализ и его приложения.—1994.—Т. 28, № 3.—С. 217–219.
12. Стукопин В. А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ // Функциональный анализ и его приложения.—2006.—Т. 40, № 2.—С. 81–84.
13. Стукопин В. А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и вычисление универсальной R-матрицы // Фундаментальная и прикладная математика.—2005.—Т. 11, № 2.—С. 185–208.
14. Stukopin V. A. Representations theory and Doubles of Yangians of classical Lie superalgebras // Asymptotic Combinatorics with Appic. to Math. Phys.—2002.—P. 255–265.
15. Nazarov M. Quantum Berezinian and the classical Capelly identity // Math. Phys.—1991.—Vol. 21.—P. 123–131.
16. Nazarov M., Tarasov V. On irreducibility of tensor products of Yangian modules // Internat. Math. Research Notices.—1998.—P. 125–150.

17. *K*ac V. A sketch of Lie superalgebra theory // Commun. Math. Phys.—1977.—Vol. 53.—P. 31–64.
18. *S*pill F., Torrielli A. On Drinfeld's second realization of the AdS/CFT $\mathfrak{su}(2|2)$ Yangian.—2008.—arXiv: hep-th/0803.3194.
19. *F*rappat L., Sorba P. Dictionary on Lie superalgebras.—London: Academic Press, 2000.
20. *Т*арасов В. О. О строении квантовых L операторов для R-матрицы XXZ модели // Теоретическая и мат. физика.—1984.—Т. 61, № 2.—С. 163–173.
21. *Т*арасов В. О. Неприводимые матрицы монодромии для для R-матрицы XXZ модели и решеточные квантовые локальные гамильтонианы // Теоретическая и мат. физика.—1985.—Т. 63, № 2.—С. 175–196.
22. *Z*hang R. B. Representations of super Yangian // J. Math. Phys.—1995.—Vol. 36.—P. 3854–3865.
23. *Z*hang R. B. The $\mathfrak{gl}(M,N)$ super Yangian and its finite-dimensional representations // Lett. Math. Phys.—1996.—Vol. 37.—P. 419–434.

Статья поступила 29 июля 2010 г.

Стукопин Владимир Алексеевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ведущий научный сотрудник лаб. вещественного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
Донской государственный технический университет,
доцент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: `stukopin@mail.ru`

ON REPRESENTATIONS OF YANGIAN OF LIE SUPERALGEBRA $\mathfrak{sl}(1,2)$

Stukopin V. A.

The finite-dimensional irreducible representations of Yangian of Lie Superalgebra $\mathfrak{sl}(1,2)$. The necessary and sufficiently conditions of irreducibility of finite-dimensional representations are formulated and proved.

Key words: Yangian of Lie Superalgebra, irreducible representations, Drinfeld polynomial, simple module.