Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 60–69

УДК **517.95**

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ РЕЖИМАМИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ

Л. И. Сазонов

Установлено существование нестационарного решения системы Навье — Стокса во внешней области, связывающего два близких устойчивых стационарных режима.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, оператор Озеена, возмущенная полугруппа Озеена, стартовая проблема.

1. Введение

Пусть ограниченное тело $B \subset \mathbb{R}^3$ движется в жидкости, занимающей все пространство вне тела, со скоростью $-\alpha(t)e_1$, где e_1 — единичный орт оси Ox_1. Тогда поле скорости жидкости $u = u(x,t)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче для системы Навье — Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u,\nabla)u = \triangle u - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0,\ u|_{\partial B(t)} = -\alpha(t)e_1,\ u|_\infty = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $B(t)$ — область, занимаемая телом в момент времени t. Здесь, не нарушая общности, считаем, что плотность и коэффициент вязкости равны единице. Полагая

$$u(x,t) = v\left(x + \int\limits_0^t \alpha(s)e_1\,ds, t\right) - \alpha(t)e_1, \quad p(x,t) = r\left(x + \int\limits_0^t \alpha(s)e_1\,ds, t\right),$$

получаем, что $v(x,t)$, $r(x,t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v,\nabla)v - \alpha'(t)e_1 = \triangle v - \nabla r, \\ \operatorname{div} v = 0,\ v|_{\partial\Omega} = 0,\ v|_\infty = \alpha(t)e_1, \end{cases} \tag{2}$$

в области $\Omega \times (0,\infty)$, где $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B(0)$.

Пусть v_{α_1}, v_{α_2} — стационарные режимы задачи обтекания, т. е. решения стационарной системы Навье — Стокса в области Ω

$$\begin{cases} \triangle v - \nabla p = (v,\nabla)v, \\ \operatorname{div} v = 0,\ v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяющие соответственно условиям

$$v|_\infty = \alpha_1 e_1, \quad v|_\infty = \alpha_2 e_1.$$

Задачей о переходе между стационарными режимами v_{α_1} и v_{α_2} будем называть задачу об определении решения нестационарной системы Навье — Стокса (2), удовлетворяющего начальному условию $v|_{t=0} = v_{\alpha_1}$ и предельному соотношению $\lim_{t\to\infty} v = v_{\alpha_2}$. В случае $\alpha_1 = 0$ получается задача, впервые рассмотренная Р. Финном [1] и названная им «стартовой проблемой». О работах, посвященных этой задаче и имеющихся здесь трудностях смотрите в [2]. В частности, в [2] при $\alpha_1 = 0$ и достаточно малом α_2 установлено существование в подходящем банаховом пространстве решения стартовой проблемы $v(t)$, удовлетворяющего оценке

$$\|\nabla(v(t) - v_{\alpha_2})\|_{L_3} \leqslant ct^{-1/2}, \quad \|v(t) - v_{\alpha_2}\|_{L_q} \leqslant c_q t^{-(1-3/q)/2}, \quad q > 3.$$

2. Сведение к интегральному уравнению

Будем предполагать, что стационарная система (3) имеет семейство стационарных решений v_α ($v_\alpha|_\infty = \alpha e_1$), гладко зависящих от параметра α при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. (В дальнейшем это условие будет уточнено.) При этом предположении решение задачи (2) будем искать в виде $v = v_{\alpha(t)} + w$, $r = p_{\alpha(t)} + q$, где $\alpha(t)$ — гладкая функция со значениями на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, такая, что $\alpha(0) = \alpha_1$, $\alpha(t) \to \alpha_2$ при $t \to \infty$. Тогда для определения w имеем следующую начально-краевую задачу в области Ω при $t > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + (v_{\alpha(t)}, \nabla)w + (w, \nabla)v_{\alpha(t)} + (w, \nabla)w - \alpha'(t)e_1 = \triangle w - \nabla q - \alpha'(t)\frac{\partial}{\partial \alpha} v_{\alpha(t)}, \\ \operatorname{div} w = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ w|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

причем будем требовать выполнения условия $w|_\infty = 0$ при всех $t \geqslant 0$.

Введем обозначение $\tilde v_\alpha = v_\alpha - \alpha e_1$. Тогда первое уравнение системы (4) представляется в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha_2 \partial_1 w + (\tilde v_{\alpha_2}, \nabla)w + (w, \nabla)\tilde v_{\alpha_2} + (\alpha(t) - \alpha_2)\partial_1 w + (\tilde v_{\alpha(t)} - \tilde v_{\alpha_2}, \nabla)w \\ +(w, \nabla)(\tilde v_{\alpha(t)} - \tilde v_{\alpha_2}) + (w, \nabla)w = \triangle w - \nabla q - \alpha'(t)\frac{\partial}{\partial \alpha}\tilde v_{\alpha(t)}. \end{gathered} \tag{5}$$

Для дальнейшего исследования удобно свести систему (4) к задаче Коши для ОДУ в подходящем банаховом пространстве. Обозначим через $S_p = S_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ подпространство в пространстве векторных полей $L_p(\Omega)$, являющееся замыканием множества всех гладких соленоидальных полей с компактным в Ω носителем. (Заметим, что здесь и далее мы не различаем обозначения для пространств векторных полей и функций.) Известно (см., например, [3, 4]), что для областей класса C^2 (в дальнейшем это условие предполагается всегда выполненным) существует ограниченный проектор $\Pi : L_p(\Omega) \to S_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Применяя его к системе (4) и учитывая (5), сведем ее к следующей задаче Коши для ОДУ в пространстве $S_p(\Omega)$

$$\frac{dw}{dt} = Aw + B(t)w + Kw + F(t), \quad w|_{t=0} = 0, \tag{6}$$

где операторы A, $B(t)$, K и векторное поле $F(t)$ имеют вид

$$Aw = \Pi\Big(\triangle w - \alpha_2 \partial_1 w - (\tilde v_{\alpha_2}, \nabla)w - (w, \nabla)\tilde v_{\alpha_2}\Big), \tag{7}$$

$$B(t)w = -\Pi\Big((\alpha(t)-\alpha_2)\partial_1 w + (\tilde v_{\alpha(t)} - \tilde v_{\alpha_2}, \nabla)w + (w,\nabla)(\tilde v_{\alpha(t)} - \tilde v_{\alpha_2})\Big), \tag{8}$$

$$Kw = -\Pi(w,\nabla)w, \quad F(t) = -\Pi\Big(\alpha'(t)\frac{\partial}{\partial\alpha}\tilde v_{\alpha(t)}\Big). \tag{9}$$

Рассмотрим действующий в пространстве $S_p(\Omega)$ оператор Озеена

$$A_0 = \Pi(\triangle - u_\infty \partial_1)$$

с областью определения $D(A_0) = S_p(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \cap \dot W_p^1(\Omega)$.

Здесь $W_p^2(\Omega)$, $\dot W_p^1(\Omega)$ — соболевские пространства векторных полей, причем элементы из $\dot W_p^1(\Omega)$ имеют нулевой след на границе $\partial\Omega$.

Оператор A_0 порождает в любом пространстве $S_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ аналитическую полугруппу $T_\infty(t)$, для которой справедливы оценки

$$\|T_\infty(t)\Pi\partial^\alpha\|_{p\to q} \leqslant c_{pq}^\alpha t^{-|\alpha|/2-3/2(1/p-1/q)},$$

где $1 < p \leqslant q < \infty$ при $\alpha = 0$; $3/2 \leqslant p \leqslant q < \infty$ при $|\alpha| = 1$.

При фиксированном значении $u_\infty \neq 0$ данные оценки установлены в [5] методом гидродинамических потенциалов, в [6] они получены независимо и иными методами, причем доказана их равномерность по параметру $u_\infty \in (0, r)$.

Вместе с оператором A_0 рассмотрим возмущенный оператор Озеена $A = A + B$, где $Bu = -\Pi((u,\nabla)v + (v,\nabla)u)$.

В [7] для оператора A установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Если v — соленоидальное поле, причем $v, \partial_j v \in L_\infty(\Omega)$, то возмущенный оператор Озеена A с областью определения $D(A) = D(A_0)$ порождает в любом пространстве $S_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, аналитическую полугруппу $T(t)$. Если дополнительно $v \in L_p(\Omega)$, $p \in [p_1, \infty]$, где $p_1 < 3$, и при некотором $q > 2$ возмущенный оператор Озеена $A : S_q(\Omega) \to S_q(\Omega)$ не имеет собственных значений в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, то для возмущенной полугруппы Озеена справедлива оценка*

$$\|T(t)\Pi\partial^\theta\|_{p\to q} \leqslant c_{pq} t^{-|\theta|/2-3/2(1/p-1/q)} \tag{10}$$

при выполнении следующих условий

$$|\theta| \leqslant 1, \quad 1 < p \leqslant q < \infty, \quad q \geqslant 3/2,$$

причем $p > 3/2$ при $|\theta| = 1$.

Заметим, что из результатов [8] (см. также [9]) следует, что обобщенное решение v_α стационарной задачи обтекания (3) удовлетворяет условиям: $\tilde v_\alpha \in W_p^2(\Omega)$ для всех $p \in (2, \infty]$, $\nabla\tilde v_\alpha \in L_p(\Omega)$ для всех $p \in (3/2, \infty]$. Далее, как уже отмечалось, мы предполагаем гладкую зависимость решения $\tilde v_\alpha$ при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ $(\alpha_1, \alpha_2 > 0)$ в норме любого пространства $L_p(\Omega)$ при $p \in (2, \infty]$. Заметим, что локально, т. е. в окрестности фиксированного α данное предположение может быть обосновано методами теории неявных отображений, если для v_α выполнены предположения теоремы 1. При малых числах Рейнольдса (в данном случае при малых α) указанное утверждение можно извлечь из результатов [10]. Сошлемся также на работу [11], где исследован вопрос о гладкой зависимости стационарного решения задачи обтекания от числа Рейнольдса в норме некоторого банахова пространства.

В дальнейшем оператор A вида (7) будем рассматривать как возмущение оператора Озеена с той же областью определения $D(A) = D(A_0)$ и предполагать выполненными предположения теоремы 1. Аналитическую полугруппу, порожденную этим оператором, будем обозначать $T(t)$. В силу наших предположений для нее справедливы оценки (10) и кроме того $\frac{\partial}{\partial\alpha}\tilde{v}_\alpha \in L_p(\Omega)$ для любого $p \in (2,\infty]$.

Формально обращая главную часть ОДУ (6), приходим к интегральному уравнению

$$w(t) = \int\limits_0^t \Big\{T(t-s)\big(B(s)w(s) + Kw(s)\big)\Big\}\,ds + \mathscr{F}(t), \tag{11}$$

где

$$\mathscr{F}(t) = \int\limits_0^t T(t-s)F(s)\,ds \tag{12}$$

а операторы $B(t)$, K и поле $F(t)$ определены в (8), (9).

В дальнейшем решение задачи Коши (6) будем понимать в обобщенном смысле как решение интегрального уравнения (11).

3. Существование решения задачи о переходе

Предварительно установим ряд оценок для интегральных операторов и поля $\mathscr{F}(t)$, входящих в уравнение (11). Всюду в дальнейшем считаем выполненным условие $\alpha(t) = \alpha_2$ при $t > R$.

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$(1+t)^\delta \|\mathscr{F}(t)\|_q \leqslant A(p,q,R,\delta)\varepsilon,$$

где

$$A(p,q,R,\delta) = \sup_\alpha \left\|\frac{\partial}{\partial\alpha}\tilde{v}_\alpha\right\|_p (1-\gamma)^{-1}(1+R)^\delta R^{1-\gamma} c_{p,q},$$

$c_{p,q}$ *— константы из оценки* (10), $\varepsilon = \max|\alpha'(t)|$, *а параметры* δ, γ, p, q *удовлетворяют соотношениям* $0 < \delta \leqslant \gamma = (3/2)(1/p - 1/q) < 1$, $2 < p \leqslant q < \infty$.

$\lhd$ Используя представления (9), (12) и оценки полугруппы (10), устанавливаем неравенство

$$\|\mathscr{F}(t)\|_q \leqslant c_{p,q}\varepsilon \sup_\alpha \left\|\frac{\partial}{\partial\alpha}\tilde{v}_\alpha\right\|_p \int\limits_0^{\min(t,R)} (t-s)^{-\gamma}\,ds. \tag{13}$$

Остается получить оценку для интеграла

$$I(t) = (1+t)^\delta \int\limits_0^{\min(t,R)} (t-s)^{-\gamma}\,ds.$$

В случае $t \leqslant R$, осуществляя замену $1 - (1+s)(1+t)^{-1} = \sigma$, приводим интеграл $I(t)$ к виду

$$I(t) = (1+t)^{\delta+1-\gamma} \int\limits_0^{t/(1+t)} \sigma^{-\gamma}\,d\sigma,$$

из которого ввиду возрастания $I(t)$ на $[0, R]$ получаем

$$I(t) \leqslant (1+R)^{\delta+1-\gamma} \int\limits_0^{R/(1+R)} \sigma^{-\gamma}\, d\sigma = \frac{R^{1-\gamma}(1+R)^{\delta}}{1-\gamma}. \tag{14}$$

В случае $t > R$ интеграл $I(t)$ убывает при возрастании t. Поэтому

$$I(t) \leqslant (1+R)^{\delta} \int\limits_0^{R} (R-s)^{-\gamma}\, ds = \frac{R^{1-\gamma}(1+R)^{\delta}}{1-\gamma}. \tag{15}$$

Утверждение леммы следует из установленных оценок (13)–(15). $\rhd$

Для оценок интегральных операторов введем банахово пространство $X_{\delta,q}$ векторных полей из $C([0,\infty), S_q(\Omega))$ с конечной нормой

$$\|u|_{\delta,q} = \sup_t (1+t)^{\delta}\|u(t)\|_q.$$

Лемма 2. *При* $0 < \delta \leqslant 1/2$, $q > 3/2$ *для оператора*

$$\mathscr{B}u(t) = \int\limits_0^t T(t-s)B(s)u(s)\, ds$$

справедлива оценка

$$\|\mathscr{B}u\|_{\delta,q} \leqslant 24 c_{q,q} d R^{1/2} \|u\|_{\delta,q},$$

где $c_{q,q}$ — *константа из оценки* (10),

$$d = \max d(t), \quad d(t) = |\alpha(t) - \alpha_2| + 2\|\tilde{v}_{\alpha(t)} - \tilde{v}_{\alpha_2}\|_{\infty}.$$

$\lhd$ Используя оценки (10) с $|\theta| = 1$, получаем неравенство

$$\|\mathscr{B}u(t)\|_q \leqslant 3c_{q,q} \int\limits_0^t (t-s)^{-1/2} d(s)(1+s)^{-\delta}\, ds \|u\|_{\delta,q}, \quad q > 3/2. \tag{16}$$

Учитывая, что функция $d(t)$ отлична от нуля лишь на отрезке $[0, R]$, приходим к выводу, что достаточно оценить интеграл

$$J(t) = (1+t)^{\delta} \int\limits_0^{\min(t,R)} (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-\delta}\, ds.$$

Применяя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1, получаем оценку

$$(1+t)^{\delta} J(t) \leqslant 8R^{1/2}.$$

С учетом (16) приходим к утверждению леммы. $\rhd$

Лемма 3. *Для оператора*

$$\mathscr{K}u(t) = \int\limits_0^t T(t-s)Ku(s)\, ds,$$

где K определен в (9), при выполнении условий

$$p > 3, \quad q > 3/2, \quad 0 \leqslant 2/p - 1/q < 1/3,$$

$$0 < \beta < 1/2, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 2\beta + (3/2)(2/p - 1/q) - 1/2$$

справедлива оценка

$$\|\mathscr{K} u\|_{\delta,q} \leqslant C(\beta,\delta,p,q)\|u\|^2_{\beta,p},$$

где

$$C(\beta,\delta,p,q) = 3c_{p/2,q}B(1-\alpha, 1-2\beta),$$

$c_{p/2,q}$ *— константа из оценки (10), $\alpha = (3/2)(2/p - 1/q) + 1/2$, $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера, определяемая формулой*

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 (t-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,ds.$$

$\lhd$ Вследствие оценок полугруппы $T(t)$ справедливо неравенство

$$\|\mathscr{K} u(t)\|_q \leqslant 3c_{p/2,q}\|u\|^2_{\beta,p}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-2\beta}\,ds. \tag{17}$$

Теперь, осуществляя в интеграле

$$I(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-2\beta}\,ds$$

замену переменной $1-(1+s)/(1+t) = \sigma$, получаем

$$I(t) = (1+t)^{1-\alpha-2\beta}\int\limits_0^{t/(1+t)} \sigma^{-\alpha}(1-\sigma)^{-2\beta}\,d\sigma \leqslant (1+t)^{1-\alpha-2\beta}B(1-\alpha,1-2\beta). \tag{18}$$

Комбинируя (17) и (18), приходим к заключению леммы. $\rhd$

Следствие 1. *При выполнении условий $q > 3$ и $1/2 - 3/(2q) \leqslant \delta < 1/2$ справедливы неравенства*

$$\|\mathscr{K} u\|_{\delta,q} \leqslant C(\delta,\delta,q,q)\|u\|^2_{\delta,q},$$

$$\|\mathscr{K} u_1 - \mathscr{K} u_2\|_{\delta,q} \leqslant 2C(\delta,\delta,q,q)\max_j \|u_j\|_{\delta,q}\|u_1-u_2\|_{\delta,q}.$$

Для исследования вопроса о разрешимости уравнения (11) воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть X — банахово пространство, $\mathbf{B} : X \to X$ — линейный ограниченный оператор и $\|\mathbf{B}\| \leqslant 1/2$, $\mathbf{Q} : X \to X$ — нелинейный оператор с оценками*

$$\|\mathbf{Q}u\| \leqslant b\|u\|^2, \quad \|\mathbf{Q}u_1 - \mathbf{Q}u_2\| \leqslant b\max_j \|u_j\|\|u_1-u_2\|.$$

Тогда уравнение

$$u = \mathbf{B}u + \mathbf{Q}u + g$$

при выполнении условия $\|g\| \leqslant 1/(16b)$ имеет единственное решение в шаре $\{u : \|u\| \leqslant 1/(4b)\}$.

$\lhd$ При указанных предположениях шар $\{u : \|u\| \leqslant 1/(4b)\}$ инвариантен относительно отображения $u \mapsto \mathbf{B}u + \mathbf{Q}u + g$, являющегося сжимающим в этом шаре. Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Банаха о неподвижной точке. $\rhd$

Вернемся к уравнению (11). Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть существует гладкое семейство стационарных решений v_α, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ задачи обтекания, причем v_{α_2} таково, что при некотором $q > 2$ возмущенный оператор Озеена $A : S_q(\Omega) \to S_q(\Omega)$ вида (7) не имеет собственных значений в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Тогда для любых фиксированных чисел q, p, δ, удовлетворяющих условиям $q > 3$, $p > 2$, $1/2 - (3/2q) \leqslant \delta < \min(1/2, (3/2)(1/p - 1/q))$, существует такое $\eta = \eta(q, p, \delta)$, что при $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \eta$ уравнение (11) имеет единственное решение $w \in X_{\delta,q}$.*

$\lhd$ Заметим, что уравнение (11) можно представить в виде

$$w = \mathscr{B}w + \mathscr{K}w + \mathscr{F}(t),$$

где операторы $\mathscr{B}$, $\mathscr{K}$ и поле $\mathscr{F}$ определены соответственно в леммах 2 и 3 и в (12). Будем считать, что $\alpha(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t$ при $t \in [0, R]$ и $\alpha(t) = \alpha_2$ при $t > R$. Тогда при заданных q, p, δ в силу лемм 1, 2 и следствия из леммы 3 выполняются неравенства

$$\|\mathscr{F}\|_{\delta,q} \leqslant A|\alpha_1 - \alpha_2|, \quad \|\mathscr{B}u\|_{\delta,q} \leqslant B|\alpha_1 - \alpha_2|\|u\|_{\delta,q},$$

$$\|\mathscr{K}u\|_{\delta,q} \leqslant C\|u\|^2_{\delta,q}, \quad \|\mathscr{K}u_1 - \mathscr{K}u_2\|_{\delta,q} \leqslant 2C\max_j \|u_j\|_{\delta,q}\|u_1 - u_2\|_{\delta,q}.$$

Вследствие установленных оценок существование решения вытекает из леммы 4.

Доказательство единственности основано на следующих соображениях. Пусть $w = u_1 - u_2$ — разность двух решений. Тогда выполняется следующее равенство $w = \mathscr{B}w + (\mathscr{K}u_1 - \mathscr{K}u_2)$. Пусть

$$\|w\|_{\delta,q,T} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}(1+t)^\delta\|w(t)\|_{\delta,q}.$$

Тогда аналогично предыдущим рассуждениям устанавливаем неравенство

$$\|w\|_{\delta,q,T} \leqslant c(T)\|w\|_{\delta,q,T},$$

в котором $c(T) \to 0$ при $T \to 0$. Поэтому $w(t) = 0$ в окрестности точки $t = 0$.

Пусть $\xi = \max T$ всех таких T, что $w(t) = 0$ при $t \leqslant T$.

Очевидно, что $\xi = \infty$, иначе аналогично предыдущему

$$\|w\|_{\delta,q,T} \leqslant d(T - \xi)\|w\|_{\delta,q,T}$$

при $T > \xi$, где $d(T - \xi) \to 0$ при $T \to \xi$. Но тогда $w(t) = 0$ на более широком отрезке чем $[0, \xi]$, что противоречит определению ξ. Этим завершается доказательство теоремы. $\rhd$

Замечание. Можно считать $\alpha(t)$ произвольной гладкой функцией и дополнительно требовать малости $\sup|\alpha'(t)|$ при $t \in [0, R]$.

4. Оценки сходимости к стационарному режиму

Дальнейшей целью является получение оценок норм разности $v(t) - v_{\alpha_2}$, где $v(t)$ — решение системы (2), при $t \to \infty$. Учитывая, что при $t > R$ $v(t) = v_{\alpha_2} + w(t)$, приходим к необходимости оценки норм $w(t)$. Для этого будет исследован вопрос о принадлежности решения w уравнения (11) пространствам $X_{\mu,r}$. В этом случае мы не предполагаем малости решения и, следовательно, малости разности $|\alpha_1 - \alpha_2|$, а используем лишь его принадлежность одному из пространств $X_{\delta,q}$, в котором существует согласно теореме 2 малое решение.

Ниже существенно используется следующая лемма.

Лемма 5. *Оператор $I - \mathscr{B}$, где $\mathscr{B}$ определен в лемме* 2, *обратим в любом пространстве $X_{\delta,q}$ при всех $q > 3/2$ и всех $\delta \leqslant 1/2$.*

$\lhd$ Ввиду соотношения

$$(\mathscr{B}w)(t) = \int\limits_0^{\min(t,R)} T(t-s)B(s)w(s)\,ds$$

достаточно доказать однозначную разрешимость уравнения

$$w(t) - \int\limits_0^t T(t-s)B(s)w(s)\,ds = f(t)$$

в пространстве $C([0,T], S_q(\Omega))$. Этот факт является следствием того, что оператор $\mathscr{B}$ имеет нулевой спектральный радиус в пространстве $C([0,T], S_q(\Omega))$ при $q > 3/2$. $\rhd$

Пусть w — решение уравнения (11) из пространства $X_{\delta,q}$, где q — одно из чисел интервала $(3,\infty)$, а δ — одно из чисел, удовлетворяющих неравенству $1/2 - 3/(2q) < \delta < \min(1/2,\, (3/2)(1/2 - 1/q))$. Существование малых решений с такими δ, q доказано в теореме 2. Предварительно покажем, что $w \in X_{\mu,q}$ при заданном q и всех $\mu < \min(1/2, (3/2)(1/2 - 1/q))$. Для элемента $\mathscr{K}w$ имеем в силу леммы 3 включение $\mathscr{K}w \in X_{\mu,q}$, где μ — любое число, удовлетворяющее неравенству $\mu < \delta_1 = 2\delta + 3/(2q) - 1/2$. Применяя лемму 5, получаем, что для w справедливо включение $w \in X_{\mu,q}$ при $\mu < \min(\delta_1, 1/2)$. Если $\delta_1 \geqslant 1/2$, то указанное свойство доказано. В противном случае, повторяя приведенное рассуждение, устанавливаем, что $\mathscr{K}w$ и, следовательно, w принадлежат $X_{\mu,q}$ при всех $\mu < \min(1/2, \delta_2 = 2\delta_1 + 3/(2q) - 1/2)$. Так как последовательность $\delta_n = 2\delta_{n-1} + 3/(2q) - 1/2$ обладает свойством $\delta_n - \delta_{n-1} = \delta_{n-1} + 3/(2q) - 1/2 > \delta + 3/(2q) - 1/2 > 0$, то при некотором n δ_n становится больше $1/2$, что опять влечет выполнение нужного свойства.

Приведенный метод рассуждений обычно называют *шнуровкой*. Таким образом, шнуровка приводит к следующим выводам: *так как при* $3 < q \leqslant 6$ *имеем* $(3/2)(1/2 - 1/q) \leqslant 1/2$, *то* $w \in X_{\mu,q}$ *при всех* $\mu < (3/2)(1/2 - 1/q)$; *в случае* $q > 6$ $w \in X_{\mu,q}$ *при всех* $\mu < 1/2$.

Следующие рассуждения показывают, что из принадлежности решения w одному из пространств $X_{\delta,q}$ следует его принадлежность некоторой совокупности пространств $X_{\mu,r}$. Ввиду предыдущего заключения можно считать, что $\delta < \min(1/2, (3/2)(1/2 - 1/q))$ и сколь угодно близко к этому числу.

Рассмотрим отдельно два случая $3 < q \leqslant 6$ и $6 < q < \infty$.

В первом случае $(3/2)(1/2 - 1/q) \leqslant 1/2$, а $\mathscr{F}(t)$ в силу леммы 1 принадлежит всем пространствам $X_{\mu,r}$ для всех $r > 2$ и $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$. Ввиду леммы 3 $\mathscr{K}w$ принадлежит всем пространствам $X_{\mu,r}$ для всех μ и r, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant 2/q - 1/r < 1/3$, $\mu < 2\delta + (3/2)(2/q - 1/r) - 1/2$. Учитывая выбор δ, получаем, что можно считать, что μ сколь угодно близко к числу $2((3/2)(1/2 - 1/q)) + (3/2)(2/q - 1/r) - 1/2 = (3/2)(2/3 - 1/r)$. Следовательно, согласно лемме 5 $w(t) \in X_{\mu,r}$ для всех μ и r, удовлетворяющих неравенствам $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$, $0 \leqslant 2/q - 1/r < 1/3$. Применение шнуровки приводит к заключению, что в первом случае $w(t) \in X_{\mu,r}$ при всех r, μ, удовлетворяющих неравенствам $3 < r \leqslant 6$, $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$.

Далее, выбирая q достаточно близким к 3 и повторяя предыдущее рассуждение, устанавливаем, что $w \in X_{\mu,r}$ для всех $r \in (2,3]$, $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$.

Таким образом, установлено, что *в первом случае* $w \in X_{\mu,r}$ *для всех* $r \in (2,6]$, $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$.

Заметим, что этот результат нельзя улучшить.

Обратимся ко второму случаю $q \in (6,\infty)$. Так как $w \in X_{\mu,q}$ для всех $\mu < 1/2$, то в силу лемм 3 и 5 $w \in X_{\mu,r}$ для всех $r > 6$, $r \in [q/2,\infty)$, $\mu < 1/2$. Следовательно, применение шнуровки, если это необходимо, приводит к включению $w \in X_{\mu,r}$ *для всех* $r \in (6,\infty)$, $\mu < 1/2$.

Далее, если $w \in X_{\delta,\,q}$, где q достаточно близко к 6, а $\delta > 1/2 - 3/(2q)$, то $w \in X_{\mu,\,r}$ для всех μ, r с условиями $0 \leqslant 2/q - 1r < 1/3$, $\mu < \min(1/2, (3/2)(1/2 - 1/r))$. Здесь важно, что r может принимать значения как большие, так и меньшие 6.

Учитывая изложенное, приходим к выводу: *из принадлежности w одному из пространств $X_{\delta,q}$, где параметры удовлетворяют условиям*

$$q \in (3,\infty), \quad \delta \in \bigl(1/2 - 3/(2q), \min(1/2, (3/2)(1/2 - 1/q))\bigr),$$

следует, что $w \in X_{\mu,r}$ при всех $r > 2$, $\mu < \min(1/2, (3/2)(1/2 - 1/r))$.

В отличие от первого случая при $q \in (6,\infty)$ граница для μ может быть улучшена. Учитывая последнее утверждение, для $\mathscr{B}w$ имеем оценку

$$\|(\mathscr{B}w)(t)\|_r \leqslant c_{r,\mu}(1+t)^{-\mu} \tag{19}$$

для всех $r > 2$, $\mu < 1/2 + (3/2)(1/2 - 1/q)$.

В то же время согласно лемме 3 справедлива оценка

$$\|(\mathscr{K}w)(t)\|_r \leqslant c_{r,\mu}(1+t)^{-\mu} \tag{20}$$

для всех $r \geqslant 6$, $\mu < 1/2 + (3/2)(1/3 - 1/r) = (3/2)(2/3 - 1/r)$. Ввиду того, что показатели для μ в (19), (20) больше, чем показатель для $\mathscr{F}(t)$ (см. лемму 1) окончательно получаем, что при всех $r \geqslant 6$ $w \in X_{\mu,\,r}$ при всех $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$.

Таким образом, установлена

Теорема 3. *Пусть w — решение уравнения* (11), *принадлежащее одному из пространств $X_{\delta,q}$ при выполнении условий*

$$q > 3, \quad 1/2 - 3/(2q) < \delta < \min\bigl(1/2, (3/2)(1/2 - 1/q)\bigr).$$

Тогда $w \in X_{\mu,r}$ для всех $r > 2$, $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$ и, следовательно,

$$\|v(t) - v_{\alpha_2}\|_r \leqslant c_{r,\mu}(1+t)^{-\mu}$$

при $r > 2$, $\mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$.

Литература

1. *Finn R.* Stationary solutions of the Navier–Stokes equations // Proc. Symp. Appl. Math.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 1965.—Vol. 17.—P. 121–153.
2. *Galdi G. P., Heywood J. G., Shibata Y.* On the global existence and convergence to steady state of Navier–Stokes flow past an obstacle that is started from rest // Arch. Rational Mech. Anal.—1997.—Vol. 138.—P. 307–318.
3. *Galdi G. P.* An introduction to the mathematical theory of Navier–Stokes equations. Vol. 1. Linearizad steady problems.—New York: Springer-Verlag, 1994.—448 p.

4. *Сазонов Л. И.* Гидродинамический проектор во внешней области.—Ростов-на-Дону: РГУ, 2000.—14 с.—Деп. в ВИНИТИ, № 3148.
5. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.
6. *Kobayashi T., Shibata Y.* On the Oseen equation in exterior domains // Math. Ann.—1998.—Vol. 310.—P. 1–45.
7. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавк. мат. журн.—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 51–61.
8. *Бабенко К. И.* О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Мат. сб.—1973.—Т. 91, № 1.—С. 3–26.
9. *Сазонов Л. И.* Об асимптотике решения задачи трехмерного обтекания вдали от обтекаемых тел // Изв. РАН. Сер. мат.—1995.—Т. 59, № 5.—С. 173–196.
10. *Сазонов Л. И.* Трехмерная стационарная задача обтекания при малых числах Рейнольдса. Построение решения в виде ряда.—Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008.—34 с.—Деп. в ВИНИТИ, № 773.
11. *Galdi G. P.* Further properties of steady-state solutions to the Navier–Stokes problem past a three-dimensional obstacle // J. of Math. Phys.—2007.—Vol. 48.—P. 1–43.

Статья поступила 18 февраля 2011 г.

Сазонов Леонид Иванович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий лаб. математической физики
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры выч. мат-ки и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `sazonov@ns.math.rsu.ru, lsznv.46@mail.ru`

THE EXISTENCE OF TRANSITIONS BETWEEN STATIONARY REGIMES OF THE FLOW PROBLEM

Sazonov L. I.

We consider the Navier–Stokes equations in exterior domain and prove the existence of the unsteady solutions that link two steady flows. The steady flows are assumed to be stable and closed enough.

Key words: Navier–Stokes system, perturbed Oseen semigroup, starting problem.