Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 2, С. 35–38

УДК **512.54**

О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ГРУПП

А. А. Дуж, А. А. Шлёпкин

Доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная прямыми произведениями циклических групп нечетных порядков на специальные проективные линейные группы размерности 2 над конечными полями характеристики 2, локально конечна.

Ключевые слова: группа Шункова, насыщенность.

Пусть G — группа, $\mathfrak{R}$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$.

Пусть K — конечная подгруппа группы G. Обозначим через $\mathfrak{R}(K)$ множество всех подгрупп группы G, которые содержат K и изоморфны группам из множества $\mathfrak{R}$, в частности, $\mathfrak{R}(e)$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из множества $\mathfrak{R}$.

Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое непустое множество неизоморфных циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M}$ — некоторое непустое множество неизоморфных групп $L_2(2^m)$. Положим, что $\mathfrak{R} = \{X \times Y : X \in \mathfrak{M},\ Y \in \mathfrak{N}\}$. Таким образом, множество $\mathfrak{R}$ состоит из набора конечных групп, каждый из которых является прямым произведением двух групп X и Y, причем группа X берется из множества $\mathfrak{M}$, а группа Y — из множества $\mathfrak{N}$.

В работе [2] была доказана локальная конечность периодической группы Шункова, насыщенной группами из множества $\mathfrak{R}$ при дополнительном ограничении: для любого элемента $(X \times Y) \in \mathfrak{R}$, $(|X|, |Y|) = 1$. Мы избавились от этого ограничения:

Теорема. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V — локально циклическая группа без инволюций.*

Используемые результаты

Предложение 1 [3]. *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию, S — силовская 2-группа из G и централизатор любой инволюции из S абелев. Тогда либо S — локально циклическая группа, либо $S \lhd G$, либо $G = R \times L_2(Q)$, где R — абелева группа без инволюций, Q — локально конечное поле характеристики 2.*

Предложение 2 [1]. *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда:*

1. P — элементарная абелева группа порядка q, и любые две силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиальным образом.

2. $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.

3. Для любого элемента нечетного порядка из G существует инволюция, инвертирующая его.

4. $N_G(P) = P\lambda H$ — группа Фробениуса с ядром P и циклическим неинвариантным множителем H порядка $q-1$, действующим транзитивно на множестве $P \setminus \{1\}$.

Доказательство теоремы

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы, S — силовская 2-подгруппа группы G, s — инволюция из S и $C = C_G(s)$.

Лемма. *Имеют место следующие утверждения:*

1. S — элементарная абелева группа.

2. Пусть S_1 и S_2 — силовские 2-подгруппы группы G и $S_1 \neq S_2$, тогда $S_1 \cap S_2 = e$.

3. Все инволюции из G сопряжены.

4. Все силовские 2-подгруппы сопряжены.

5. $C_G(s) = C_G(S)$.

6. Все инволюции из C лежат в $Z(C)$.

$\lhd$ 1. Пусть $e \neq s_1 \in S$. По условию Теоремы $\langle s_1 \rangle \leqslant (X_1 \times Y_1) \in \mathfrak{R}(e)$. Так как $s_1 \in X_1$, а $X_1 \simeq L_2(2^m)$, то $|s_1| = 2$ (предложение 2, п. 1). В силу произвольного выбора s_1 утверждение 1 доказано.

2. Пусть $S_1 \cap S_2 = D \neq e$, $s_1 \in \{S_1 \backslash D\} \neq \varnothing$ и $s_2 \in \{S_2 \backslash D\} \neq \varnothing$ для $e \neq s_3 \in D$. Группа $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ — конечная группа, так как в силу утверждения 1 она порождена тремя инволюциями и одна из них, s_3, содержится в ее центре. По условию насыщенности $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle \leqslant (X_2 \times Y_2) \in \mathfrak{R}(e)$ и $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle \leqslant S^* \in Syl_2 X_2$, т. е. $s_1 s_2 = s_2 s_1$ (предложение 1, п. 1). В силу произвольности выбора s_1, s_2 получим $S_1 S_2 = S_2 S_1 = S_1 = S_2$. Противоречие с выбором S_1 и S_2. Утверждение 2 доказано.

3. Пусть x, y — различные инволюции из G. По условию теоремы конечная группа $\langle x, y \rangle \leqslant (X_3 \times Y_3)$, где $(X_3 \times Y_3) \in \mathfrak{R}(G)$. Следовательно, $x, y \in X_3$, а в X_3 все инволюции сопряжены (предложение 2, п. 4).

4. Пусть S_1 и S_2 — две различные силовские 2-подгруппы группы G. Возьмем $e \neq x \in S_1$ и $e \neq y \in S_2$. По утверждению 3 $x = y^g$ для некоторого $g \in G$, но тогда $x \in (S_1 \cap S_2^g)$ и по утверждению 2 получим, что $S_1 = S_2^g$. Утверждение 4 доказано.

5. Пусть $b \in C_G(s)$. Если $|b| = 2$, то $b \in C_G(S)$ (утверждения 1, 2). Рассмотрим случай, когда $|b|$ — нечетное число. Так как $e \neq s \in S \cap S^b$, то по утверждению 2 $S = S^b$ и $S \leftthreetimes \langle b \rangle$ — локально конечная группа. Следовательно, для любого $s_1 \in S$ группа $\langle b, s, s_1 \rangle = S_1^* \leftthreetimes \langle b \rangle$ — конечная группа, где S_1^* — 2-группа. Тогда $\langle b, s, s_1 \rangle \leqslant (X_4 \times Y_4) \in \mathfrak{R}(\langle b, s, s_1 \rangle)$, $\langle s_1, s \rangle \leqslant X_4$, $b \in Y_4$, т. е. $b \in C(s_1)$ для любых $s_1 \in S$. Осталось рассмотреть случай, когда $|b| = 2d$, где d — нечетное число. В этом случае $b = vu$, где $|v| = 2$, а $|u| = d$. Как показано выше, элементы u и v лежат в $C(S)$, а значит, и их произведение $b \in C(S)$. Таким образом, имеет место включение $C_G(s) \leqslant C_G(S)$. Так как обратное включение $C_G(S) \leqslant C_G(s)$ очевидно, то имеет место равенство $C_G(s) = C_G(S)$. Утверждение 5 доказано.

6. По утверждению 5 $S \leqslant Z(C)$. Следовательно, любая инволюция v из C должна лежать в S, так как в противном случае $\langle S, v \rangle$ — 2-группа, что противоречит тому, что S — силовская 2-подгруппа. Утверждение 6 доказано. $\rhd$

Лемма. *C — абелева группа.*

$\lhd$ Если C — 2-группа, то $C = S$ и согласно лемме 1 все доказано. Пусть C — не 2-группа, $1 \neq b \in C$ и $|b|$ — нечетное число. Пусть c — произвольный элемент из C нечетного порядка. Предположим, что $|b|$ — простое число. Тогда конечная группа $\langle s, b, b^c \rangle \leqslant (X_1 \times Y_1) \in \mathfrak{R}(\langle s, b, b^c \rangle)$. Следовательно, b, b^c лежат в Y_1. Последнее означает, что $\langle b \rangle = \langle b \rangle^c$, группа $\langle s, b, c \rangle$ конечна и $\langle s, b, c \rangle \leqslant (X_2 \times Y_2)$, где $s \in X_2$, а $b, c \in Y_2$. Так как Y_2 — циклическая группа, то $cb = bc$. Таким образом, все элементы простого нечетного порядка группы C содержатся в $Z(C)$. Пусть теперь $|b|$ — непростое нечетное число и $\langle b_1 \rangle$ — подгруппа из $\langle b \rangle$ такая, что $|\langle b \rangle : \langle b_1 \rangle|$ — простое число. Используя индукцию, мы можем предполагать, что $b_1 \in Z(C)$, а значит, в силу условия теоремы группа $\langle s, b_1, b, b^c \rangle$ конечна и $\langle s, b_1, b, b^c \rangle \leqslant (X_3 \times Y_3)$, где $s \in X_3$, а b_1, b, b^c лежат в Y_3. Следовательно, $\langle b \rangle = \langle b \rangle^c$ и $\langle s, b, c \rangle$ — конечная группа. Далее, $\langle s, b, c \rangle \leqslant (X_4 \times Y_4)$, где $s \in X_4$, а b и c — элементы из Y_4. Так как Y_4 — циклическая группа, то $bc = cb$. Итак, мы показали, что любой элемент нечетного порядка из C лежит в $Z(C)$. Так как любой элемент $c \in C$ можно представить в виде $c = c_1 c_2$, где c_1 — инволюция, c_2 — элемент нечетного порядка, то C — абелева группа. $\rhd$

Лемма. *S не является нормальной подгруппой группы G.*

$\lhd$ Предположим обратное, что $S \lhd G$. По условию теоремы G содержит подгруппу $L \simeq L_2(2^m)$. Поскольку $e \neq S_1^* = L \cap S$ (лемма 1, свойство 4), то S_1^* — нормальная подгруппа группы L, что не возможно ни при каком m. $\rhd$

Лемма. *Если S — локально циклическая группа, то теорема верна.*

$\lhd$ Предположим, что S — локально циклическая группа. Тогда из леммы 1 получаем, что $|S| = 2$ и $X = L_2(2)$ — группа Фробениуса порядка 6. Возьмем в G конечную подгруппу $B \simeq L_2(2)$. Тогда $B = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, где $b^3 = z^2 = 1$ и $b^z = b^{-1}$. В силу условий теоремы для любого $g \in G$ конечная группа $\langle b, b^g \rangle \leqslant (X_1 \times Y_1)$, где $(X_1 \times Y_1) \in \mathfrak{R}(\langle b, b^g \rangle)$. Так как X_1 — группа Фробениуса порядка 6, а Y_1 — циклическая группа, то все элементы простых нечетных порядков из $(X_1 \times Y_1)$ перестановочны. В частности, $bb^g = b^g b$. Следовательно, $N = \langle b^G \rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G и период N равен 3. Покажем, что $|N| \leqslant 9$. Действительно, предположим обратное, тогда в N содержится подгруппа $N_1 = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle b_3 \rangle$, где $|b_1| = |b_2| = |b_3| = 3$. По условию теоремы $N_1 \leqslant (X_2 \times Y_2)$, где $(X_2 \times Y_2) \in \mathfrak{R}(N_1)$. Но в силу условия теоремы подгруппа $(X_2 \times Y_2)$ не может содержать элементарных абелевых подгрупп порядка 3^3. Противоречие. Итак, $N \lhd G$ и $|N| \leqslant 9$. Отсюда вытекает, в частности, что $\langle z, z^g \rangle N$ — конечная подгруппа группы G. Ясно, что $B \subseteq \langle z, z^g \rangle N$. По условию теоремы $\langle z, z^g \rangle N \subset B \leftthreetimes Y$, где Y — циклическая группа без инволюций. Следовательно, $z^g \in B$ для любого $g \in G$ и $z^G = B \lhd G$. Так как $G = C_G(z)B$ и $C_G(z) = \langle z \rangle \times C_0$, где C_0 — локально циклическая группа без инволюций (лемма 1, п. 3), то $G = B \times C_0$. $\rhd$

Завершим доказательство теоремы. Согласно теореме Н. М. Сучкова (предложение 1) и леммам 1, 3, 4 получаем, что $G = L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$, Q — локально конечное поле характеристики 2, а $V \simeq R$ — абелева группа без инволюций. Покажем, что R — локально циклическая группа. Действительно, если R не локально циклическая, то в R найдется подгруппа $D = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = p$ — простое нечетное число. Рассмотрим в L подгруппу $L_1 \simeq L_1(2^{k_1})$. По условию теоремы конечная группа $L_1 \times D \leqslant M_1 = (X_1 \times Y_1)$, где $X_1 \simeq L_2(2^{k_2})$, $Y_1 = \langle y_1 \rangle$ — циклическая группа без инволюций. Но подгруппа M_1 не может содержать подгруппы вида $L_1 \times D$. Теорема доказана.

Литература

1. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы.—М.: Мир, 1985.—560 с.
2. *Панюшкин Д. Н., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических и проективных специальных линейных групп // Тр. ИММ УрО РАН.—2010.—Т. 16, № 2.—С. 177–185.
3. *Сучков Н. М.* О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 2.—С. 153–160.

Статья поступила 26 октября 2011 г.

Дуж Анна Александровна
Красноярский государственный аграрный университет,
аспирант каф. прикладной математики
и информационно-компьютерной безопасности
РОССИЯ, 660049, Красноярск, пр. Мира, 90
E-mail: `anyaduzh@yandex.ru`

Шлёпкин Алексей Анатольевич
Сибирский федеральный университет,
студент кафедры прикладной математики
и компьютерной безопасности
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: `shlyopkin@mail.ru`

ABOUT SHUNKOV'S GROUPS, SATURATED WITH DIRECT PRODUCT OF GROUPS

Duzh A. A., Shlyopkin A. A.

It is proved that an infinite periodic Shunkov's group, saturated with direct products of cyclic groups of odd orders by two-dimentional projective special linear groups over finite fields of characteristic two is locally finite.

Key words: Shunkov's group, saturation.