Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 2, С. 45–49

УДК **517.968**

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Ж. Д. Тотиева

В работе исследуется фундаментальное решение обобщенной задачи Коши для одного гиперболического оператора, и изучены некоторые свойства фундаментального решения.

Ключевые слова: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши.

Данное исследование является продолжением работы [3], в которой была сформулирована многомерная задача определения функции смещения в первом приближении для системы интегро-дифференциальных уравнений упругой среды с памятью.

Основным результатом работы является теорема о существовании и единственности фундаментального решения, с помощью свойств которого будет в дальнейшем проведен анализ поставленной в [3] задачи.

Обозначим через $R(x,t)$ резольвенту ядра $K(x,t)$ [3], которая является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$R(x,t) = K(x,t) + \int_0^t K(x,t-\tau)R(x,\tau)\,d\tau,$$

причем $R(x,t) \in C^2(R_+ \times [0,T])$, $R(x,0) = 0$, $\frac{\partial R}{\partial t}(x,0) = 0$, $R_+ = [0,\infty)$, $T > 0$ — фиксированное число.

Пусть

$$y = \psi(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad v^2(x) = \frac{\mu_0(x)}{\rho_0(x)},$$

$\rho_0(x)$, $\mu_0(x)$ — заданные положительные функции из класса $C^2(R_+)$,

$$\frac{d\rho_0}{dx}(+0) = 0, \quad \frac{d\mu_0}{dx}(+0) = 0,$$

$$q(y,\nu) = \frac{s''(y)}{s(y)} - 2\left(\frac{s'(y)}{s(y)}\right)^2 - \nu^2\,\frac{\mu_0\bigl(\psi^{-1}(y)\bigr)}{\rho_0\bigl(\psi^{-1}(y)\bigr)},$$

ν — параметр,

$$s(y) = \sqrt{\frac{\nu(+0)\rho_0(+0)}{\nu\bigl(\psi^{-1}(y)\bigr)\rho_0\bigl(\psi^{-1}(y)\bigr)}}.$$

Определим область $\nabla(T) = \{(x,t) : \psi(x) \leqslant t \leqslant T\}$, $\Gamma = t - t_0 - |y - y_0|$, (y_0, t_0) — фиксированная точка области $\nabla(T)$, $\delta(y - y_0, t - t_0)$ — δ-функция Дирака,

$$\Diamond(y,t) = \big\{(\xi,\tau) : t_0 + |y_0 - \xi| \leqslant \tau \leqslant t - |y - \xi|\big\}, \quad \Delta(y,t) = \big\{(\xi,\tau) : 0 \leqslant t - |y - \xi|\big\}.$$

Продолжим функции $q(y,\nu)$ и $R(\psi^{-1}(y),t)$ четным образом в область $y < 0$. Обозначим через $G_0(y, y_0, t, t_0, \nu)$ фундаментальное решение обобщенной задачи Коши [4]:

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G_0}{\partial y^2} - q(y,\nu)\, G_0 = \delta(y - y_0, t - t_0), \tag{1}$$

$$G_0\big|_{t<0} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем оператор дифференцирования по переменной, например, $\partial R/\partial t$ будем обозначать R_t. Знак «$*$» в последующих записях обозначает операцию свертки по временной переменной.

Теорема. *Существует единственное решение задачи Коши:*

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - q(y,\nu) G + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[R * G\Big] = \delta(y - y_0, t - t_0), \tag{3}$$

$$G\big|_{t<0} = 0, \tag{4}$$

где $G(y, y_0, t, t_0, \nu)$ имеет следующую структуру $G = G_0 + \widetilde{G}$, причем

$$\widetilde{G}(y, y_0, t, t_0, \nu)\big|_{t - t_0 \leqslant |y - y_0|} = 0, \quad \widetilde{G} \in C\big(t - t_0 \geqslant |y - y_0|\big),$$
$$\widetilde{G}_t \in C\big(t - t_0 \geqslant |y - y_0|\big),\ t \in [0,T].$$

$\lhd$ Для начала поясним, что структура G_0 хорошо изучена [4]:

$$G_0(y, y_0, t, t_0, \nu) = \theta\big(t - t_0 - |y - y_0|\big)\left[\frac{1}{2} + \overline{G}_0(y, y_0, t, t_0, \nu)\right],$$

$$\theta\big(t - t_0 - |y - y_0|\big) = \begin{cases} 1, & t - t_0 - |y - y_0| \geqslant 0, \\ 0, & t - t_0 - |y - y_0| < 0 \end{cases} \text{ — функция Хевисайда,}$$

$$\overline{G}_0(y, y_0, t, t_0, \nu) \in C^2\big(t - t_0 \geqslant |y - y_0|\big),$$
$$\overline{G}(y, y_0, t, t_0, \nu)\big|_{t - t_0 = |y - y_0|} = 0.$$

Ясно, что $G = G_0 + \widetilde{G}$, где $\widetilde{G}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial y^2} - q(y,\nu)\widetilde{G} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[R * \widetilde{G}\Big] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[R * G_0\Big], \tag{5}$$

$$\widetilde{G}\big|_{t<0} = 0. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) вытекает, что

$$\widetilde{G} = G_0 * \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(R * G_0\big)\right] + G_0 * \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(R * \widetilde{G}\,\big)\right]. \tag{7}$$

Для ясности распишем первое слагаемое равенства (7), обозначив его $F(y, y_0, t, t_0, \nu)$:

$$F(y,y_0,t,t_0,\nu) = -\theta(\Gamma)\Bigg[\iint\limits_{\Diamond(y,t)} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} + \overline{G}_0\big(\xi, y_0, \tau, t_0, \nu\big)\Big) R_t\big(\psi^{-1}(\xi), t - |y-\xi| - \tau\big)\, d\tau d\xi$$

$$+ \iint\limits_{\Diamond(y,t)} \overline{G}_{0\,t}\big(\xi, y_0, t-\tau, t_0, \nu\big) \int\limits_{t_0+|\xi-y_0|}^{\tau} \Big(\frac{1}{2} + \overline{G}_0\big(\xi, y_0, s, t_0, \nu\big)\Big) R_t\big(\psi^{-1}(\xi), \tau - s\big)\, ds\, d\tau d\xi\Bigg].$$

Здесь и далее

$$\iint\limits_{\Diamond(y,t)} \quad \text{обозначает} \quad \int\limits_{\frac{y+y_0-(t-t_0)}{2}}^{\frac{y+y_0+(t-t_0)}{2}} \int\limits_{t_0+|y_0-\xi|}^{t-|y-\xi|}.$$

Заметим, что $F(y, y_0, t, t_0, \nu)$ в $\Delta(y, t)$ непрерывна.

Рассмотрим область $D' = \{(y, t) : t - t_0 \leqslant |y - y_0|, t \in [0, T]\}$. Покажем, что $\widetilde{G}(y, y_0, t, t_0, \nu) \equiv 0$ в D'.

Возьмем произвольную фиксированную точку $(y_1, t_1) \in D'$ и проведем через нее две характеристики. Тогда для всех точек $(y, t) \in \Delta(y_1, t_1)$, учитывая, что

$$F(y, y_0, t, t_0, \nu)|_{t-t_o<|y-y_0|} = 0,$$

получаем однородное уравнение:

$$\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu) = -\Bigg[\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(y,t)} R_t\big(\psi^{-1}(\xi), t-|y-\xi|-\tau\big)\cdot \widetilde{G}(\xi,y_0,\tau,t_0,\nu)\, d\tau\, d\xi$$

$$+ \iint\limits_{\Delta(y,t)} \overline{G}_{0\,tt}(\xi, y_0, t-\tau, t_0,\nu) \int\limits_0^{\tau} R\big(\psi^{-1}(\xi), \tau - s\big)\cdot \widetilde{G}(\xi, y_0, s, t_0, \nu)\, ds\, d\tau\, d\xi\Bigg].$$

Предполагаем, что в области D' функция $\widetilde{G}(y, y_0, t, t_0, \nu)$ непрерывна.

Введем следующие обозначения:

$$\max_{y_1-(t_1-t)\leqslant y\leqslant y_1+(t_1-t)} \Big|\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)\Big| = g(y_0,t,t_0,\nu),$$

$$\max_{(y,t)\in\Delta(y_1,t_1)} \Big|R_t\big(\psi^{-1}(y),t\big)\Big| = M_0, \qquad \max_{(y,t)\in\Delta(y_1,t_1)} \Big|R\big(\psi^{-1}(y),t\big)\Big| = M_1,$$

$$\max_{(y,t)\in\Delta(y_1,t_1)} \Big|\overline{G}_{0\,tt}(y_0,y,t_0,t,\nu)\Big| = M_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T.$$

Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} g(y_0,t,t_0,\nu) &\leqslant \frac{1}{2}\, M_0 T \int\limits_0^t g(y_0,\tau,t_0,\nu)\, d\tau + M_2 T^2 M_1 \int\limits_0^t g(y_0,\tau,t_0,\nu)\, d\tau \\ &= \Big(\frac{1}{2}\, M_0 T + M_2 T^2 M_1\Big) \int\limits_0^t g(y_0,\tau,t_0,\nu)\, d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

По лемме Гронуолла [2] $g(y_0,t,t_0,\nu)\equiv 0$ при $t\in[0,t_1]$, значит, $\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)\equiv 0$ в $\Delta(y_1,t_1)$. Так как точка была выбрана произвольно, то $\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)\equiv 0$ в D'.

Используя свойства свертки функций [1], операцию дифференцирования по параметру и только что доказанное свойство для $\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)$, получаем интегральное уравнение:

$$\begin{gathered}\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)=-\theta(\Gamma)\Bigg[\frac{1}{2}\iint\limits_{\Diamond(y,t)}R_t\big(\psi^{-1}(\xi),t-|y-\xi|-s\big)\,\widetilde{G}(\xi,y_0,s,t_0,\nu)\,ds\,d\xi\\+\iint\limits_{\Diamond(y,t)}\overline{G}_{0\,t}(\xi,y_0,t-\tau,t_0,\nu)\int\limits_{t_0+|y_0-\xi|}^{\tau}R_t\big(\psi^{-1}(\xi),t-s\big)\widetilde{G}(\xi,y_0,s,t_0,\nu)ds\,d\tau d\xi\Bigg]+F(y,y_0,t,t_0,\nu).\end{gathered}\tag{9}$$

Из (8) следует, что $\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)|_{t-t_0=|y-y_0|}=0$.

Решение (9) представляем в виде

$$\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{G}_n(y,y_0,t,t_0,\nu),\tag{10}$$

где

$$\widetilde{G}_0=F(y,y_0,t,t_0,\nu),$$

$$\begin{gathered}\widetilde{G}_n(y,y_0,t,t_0,\nu)=-\theta(\Gamma)\Bigg[\frac{1}{2}\iint\limits_{\Diamond(y,t)}R_t\big(\psi^{-1}(\xi),t-|y-\xi|-\tau\big)\widetilde{G}_{n-1}(\xi,y_0,\tau,t_0,\nu)\,d\tau\,d\xi\\+\iint\limits_{\Diamond(y,t)}\overline{G}_{0\,t}(\xi,y_0,t-\tau,t_0,\nu)\int\limits_{t_0+|y_0-\xi|}^{\tau}R_t\big(\psi^{-1}(\xi),\tau-s\big)\widetilde{G}_{n-1}(\xi,y_0,s,t_0,\nu)\,ds\,d\tau\,d\xi\Bigg].\end{gathered}\tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\max_{(\xi,\tau)\in\Diamond(y,t)}\Big|R_t\big(\psi^{-1}(\xi),\tau\big)\Big|=M_3,$$

$$\max_{(\xi,\tau)\in\Diamond(y,t)}\Big|\overline{G}_{0\,t}(\xi,y_0,t-\tau,t_0,\nu)\Big|=M_4,$$

$$\max_{(\xi,\tau)\in\Diamond(y,t)}\Big|F(\xi,y_0,\tau,t_0,\nu)\Big|=M_5.$$

Из (11) следует оценка

$$\Big|\widetilde{G}_n(y,y_0,t,t_0,\nu)\Big|\leqslant\left[\frac{1}{2}+M_4\big(T-t_0\big)\right]^nM_3^nM_5\big(T-t_0\big)^n\frac{(t-t_0)^n}{2\cdot n!}.$$

Ряд (10) мажорируется сходящимся числовым рядом, значит, он сходится равномерно, следовательно, $\widetilde{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)$ непрерывна в $\big\{(y,t):\,|y-y_0|\leqslant t-t_0\leqslant T-|y-y_0|\big\}$.

Докажем единственность решения задачи (3)–(4). Предположим, что существует два решения G_1 и G_2, причем $G_1=G_0+\widetilde{G}_1$ и $G_2=G_0+\widetilde{G}_2$, так как фундаментальное решение оператора L_0 единственно [4]. Обозначим через $\widehat{G}=G_1-G_2$ или, что то же самое, $\widehat{G}=\widetilde{G}_1-\widetilde{G}_2$. Тогда для функции $\widehat{G}=\widehat{G}(y,y_0,t,t_0,\nu)$ получаем задачу:

$$\frac{\partial^2\widehat{G}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\widehat{G}}{\partial y^2}-q(y,\nu)\widehat{G}=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[R*\widehat{G}\Big],\tag{12}$$

$$\widehat{G}\big|_{t<0}=0.\tag{13}$$

В результате решения задачи (12)–(13) получается интегральное уравнение, аналогичное (9), в котором $F(y, y_0, t, t_0, \nu) \equiv 0$. Пользуясь оценкой типа (8) и леммой Гронуолла, выводим, что $\widehat{G}(y, y_0, t, t_0, \nu) \equiv 0$, что и доказывает единственность решения задачи (3)–(4).

Дифференцируя (9) по времени, получим

$$\widetilde{G}_t(y, y_0, t, t_0, \nu) = -\theta(\Gamma)\Bigg[\frac{1}{2}\iint\limits_{\Diamond(y,t)} R_{tt}\big(\psi^{-1}(\xi), t-|y-\xi|-\tau\big)\widetilde{G}(\xi, y_0, \tau, t_0, \nu)\, d\tau\, d\xi$$

$$+\iint\limits_{\Diamond(y,t)} \overline{G}_{0\,t}(\xi, y_0, t-\tau, t_0, \nu)\int\limits_{t_0+|y_0-\xi|}^{\tau} R_{\tau\tau}\big(\psi^{-1}(\xi), \tau-s\big)\widetilde{G}(\xi, y_0, s, t_0, \nu)\, ds\, d\tau\, d\xi$$

$$+\iint\limits_{\Diamond(y,t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\overline{G}_0(\xi, y_0, \tau, t_0, \nu)\right) R_{tt}\big(\psi^{-1}(\xi), t-|y-\xi|-\tau\big)\, d\tau\, d\xi + \iint\limits_{\Diamond(y,t)} \overline{G}_{0\,t}(\xi, y_0, t-\tau, t_0, \nu)$$

$$\times \int\limits_{t_0+|y_0-\xi|}^{\tau} \left(\frac{1}{2}+\overline{G}_0(\xi, y_0, s, t_0, \nu)\right) R_{tt}\big(\psi^{-1}(\xi), t-|y-\xi|-s\big)\, ds\, d\tau\, d\xi\Bigg].$$

Используя свойства подынтегральных функций, заключаем, что из непрерывности правой части следует непрерывность левой части в области $t - t_0 \geqslant |y - y_0|$. $\triangleright$

Литература

1. *В*ладимиров В. С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1967.—436 с.
2. *М*изохата С. Теория уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1977.—504 с.
3. *Т*уаева Ж. Д. Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 297–306.
4. *Я*хно В. Г. Обобщенные функции в обратных задачах для дифференциальных уравнений (Методические указания).—Новосибирск: НГУ, 1987.—24 с.

Статья поступила 10 июня 2010 г.

Тотиева Жанна Дмитриевна
Центр геофизических исследований ВНЦ РАН и РСО-А,
зав. сектором мат. моделирования геофизических процессов
РОССИЯ, 362002, Владикавказ, ул. Маркова, 93 а
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

ON THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A HYPERBOLIC OPERATOR

Totieva Zh. D.

Under study are the properties of the fundamental solution of the generalized Cauchy problem for some hyperbolic operator.

Key words: fundamental solution, Cauchy generalized problem.