Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 19–23

УДК **517.633**

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

В. В. Гусаченко, В. Б. Левенштам

Рассмотрен конкретный (иллюстративный) пример линейной параболической задачи с двумя независимыми переменными (x,t) и высокочастотными по времени t коэффициентами; соответствующая стационарная однородная усредненная задача при этом вырождена. С помощью методики, развитой недавно для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]), и метода пограничного слоя построена полная формальная асимптотика периодического по времени решения.

Ключевые слова: параболическая задача, высокочастотные по времени коэффициенты, вырожденная усредненная задача, полная асимптотика периодического по времени решения.

В работе [1] (см. также [2]) построены и обоснованы полные асимптотические разложения периодических решений линейных нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с высокочастотными коэффициентами, для которых стационарная формально усредненная задача имеет простое нулевое собственное значение. Важную роль при этом играет методика, развитая в работе [3], где рассматривались возмущения стационарных задач на спектре.

В данной работе методика [1] в сочетании с методом погранслоя [4] применена для построения формальной асимптотики решения конкретной параболической задачи второго порядка с двумя независимыми переменными (x,t) в полосе с высокочастотными по времени t коэффициентами. Соответствующая однородная стационарная формально усредненная задача вырождена. Представленная в работе методика, как видно из изложения ее на примере, применима к широкому классу высокочастотных параболических задач с вырождением.

Построим формальную асимптотику $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического по времени t решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) + \frac{1}{\omega} u(x,t)\,\cos x + u(x,t)\,x \sin \omega t + \cos 2x + \cos x \cos \omega t; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \\ u(x,t+2\pi) = u(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

рассматриваемой в полосе $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение оператор A_0 с областью определения $D(A_0) = \{u \in W_2^2([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$, действующий в $L_2([0,\pi])$ по правилу $A_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$. Оператор A_0 самосопряжен и его спектр имеет вид $\sigma(A_0) = \{1-k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $a_0(x) = \sin x$ — собственная функция оператора A_0, отвечающая собственному значению $\lambda = 0$.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 8210, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.

Из соотношений $(\cos x \sin x, \sin x) = 0$ и $\left(\frac{1}{6}\sin 2x \cos x - x\cos x, \sin x\right) = \frac{7\pi}{24} \neq 0$ следует, что собственная функция $a_0(x)$ имеет обобщенную присоединенную функцию $a_1(x)$ относительно соответствующей тройки операторов A_0, A_1, A_2 (которые аналогичны одноименным конечномерным операторам из [1]), т. е. справедливо равенство $A_0a_1(x) + A_1a_0(x) = 0$, а уравнение $A_0z(x) + A_1a_1(x) + A_2a_0(x) = 0$ не имеет решений.

Для построения искомой формальной асимптотики в окрестности точки $x = 0$ положим $\xi = x\sqrt{\omega}$, а в окрестности точки $x = \pi$ сделаем замену $\eta = (\pi - x)\sqrt{\omega}$. Тогда $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \omega\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \omega\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$.

Формальную асимптотику решения задачи (1) с учетом [1, 4] строим в виде

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \omega^2 C_{-4}a_0(x) + \omega^{\frac{3}{2}}D_{-4}a_0(x)\\
&+ \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-k}\Big[u_{2k+1}(x) + w^1_{2k+1}(\xi) + w^2_{2k+1}(\eta) + C_{k-2}a_0(x)\\
&+ C_{k-3}a_1(x) + y_{2k+1}(x,\tau) + z^1_{2k+1}(\xi,\tau) + z^2_{2k+1}(\eta,\tau)\Big]\\
&+ \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{\frac{-2k-1}{2}}\Big[u_{2k+2}(x) + w^1_{2k+2}(\xi) + w^2_{2k+2}(\eta) + D_{k-2}a_0(x)\\
&+ D_{k-3}a_1(x) + y_{2k+2}(x,\tau) + z^1_{2k+2}(\xi,\tau) + z^2_{2k+2}(\eta,\tau)\Big], \quad \tau = \omega t.
\end{aligned} \tag{2}$$

Подставим ряд (2) в уравнение и граничные условия задачи (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω, причем отдельно для регулярных и для погранслойных слагаемых. Равенство коэффициентов при старшей степени (ω^2) доставляет задачи:

$$\begin{cases}\frac{\partial y_{-1}(x,\tau)}{\partial\tau} = C_{-4}\,x\sin x\sin\tau;\\ \langle y_{-1}(x,\tau)\rangle = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\partial^2 w^1_{-1}(\xi)}{\partial\xi^2} = 0;\\ w^1_{-1}(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\partial^2 w^2_{-1}(\eta)}{\partial\eta^2} = 0;\\ w^2_{-1}(\eta)\big|_{\eta=\infty} = 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial z^1_{-1}(\xi,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 z^1_{-1}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2};\\ \big\langle z^1_{-1}(\xi,\tau)\big\rangle = 0;\\ z^1_{-1}(\xi,\tau)\big|_{\xi=\infty} = 0;\\ z^1_{-1}(0,\tau) = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\partial z^2_{-1}(\eta,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 z^2_{-1}(\eta,\tau)}{\partial\xi^2};\\ \big\langle z^2_{-1}(\eta,\tau)\big\rangle = 0;\\ z^2_{-1}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\infty} = 0;\\ z^2_{-1}(0,\tau) = 0.\end{cases}$$

Таким образом, $y_{-1}(x,\tau) = -C_{-4}x\sin x\cos\tau$, $z^1_{-1}(\xi,\tau) = z^2_{-1}(\eta,\tau) = w^1_{-1}(\xi) = w^2_{-1}(\eta) \equiv 0$.

Приравняем теперь регулярные слагаемые при следующей степени $\left(\omega^{\frac{3}{2}}\right)$: $\frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial\tau} = D_{-4}x\sin x\sin\tau$. Отсюда $y_0(x,\tau) = -D_{-4}x\sin x\cos\tau$.

Для погранслойных слагаемых получим те же задачи, что и на предыдущем шаге. Поэтому $z^1_0(\xi,\tau) = z^2_0(\eta,\tau) = w^1_0(\xi) = w^2_0(\eta) \equiv 0$.

Приравняем теперь регулярные слагаемые при степени ω:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_1(x,\tau)}{\partial\tau} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)\left(u_{-1}(x) + y_{-1}(x,\tau) + \frac{1}{6}\,C_{-4}\sin 2x\right) + C_{-4}\cos x\sin x\\
&+ \Big(u_{-1}(x) + C_{-3}a_0(x) + C_{-4}a_1(x) + y_{-1}(x,\tau)\Big)x\sin\tau.
\end{aligned} \tag{3}$$

Применяя к уравнению (3) операцию усреднения по τ, составим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{-1}(x)}{\partial x^2} + u_{-1}(x) = 0; \\ u_{-1}(0) = u_{-1}(\pi) = 0; \\ (u_{-1}(x), \sin x) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, $u_{-1}(x) = 0$. Возвращаясь к (3), найдем

$$y_1(x,\tau) = -C_{-3}\sin x\, x\cos\tau - \frac{1}{6}\ C_{-4}\sin 2x\, x\cos\tau + \frac{1}{4}C_{-4}\sin x\, x^2\cos 2\tau - 2C_{-4}\cos x\sin\tau.$$

Перейдем к погранслойным слагаемым при той же степени. Получим задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_1^1(\xi)}{\partial \xi^2} = 0; \\ w_1^1(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 w_1^2(\eta)}{\partial \eta^2} = 0; \\ w_1^2(\eta)\big|_{\eta=\infty} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $w_1^1(\xi) = w_1^2(\eta) \equiv 0$. Далее,

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1^1(\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_1^1(\xi,\tau)}{\partial \xi^2}; \\ \big\langle z_1^1(\xi,\tau)\big\rangle = 0; \\ z_1^1(\xi,\tau)\big|_{\xi=\infty} = 0; \\ z_1^1(0,\tau) = 2C_{-4}\sin\tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial z_1^2(\eta,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_1^2(\eta,\tau)}{\partial \eta^2}; \\ \big\langle z_1^2(\eta,\tau)\big\rangle = 0; \\ z_1^2(\eta,\tau)\big|_{\eta=\infty} = 0; \\ z_1^2(0,\tau) = -2C_{-4}\sin\tau. \end{cases}$$

Вернемся к этим задачам после нахождения коэффициента C_{-4}.

Приравняем регулярные слагаемые при следующей степени ($\omega^{\frac{1}{2}}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_2(x,\tau)}{\partial \tau} = &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)\left(u_0(x) + y_0(x,\tau) + \frac{1}{6}D_{-4}\sin 2x\right) + D_{-4}\cos x\sin x \\ &+\Big(u_0(x) + D_{-3}a_0(x) + D_{-4}a_1(x) + y_0(x,\tau)\Big)x\sin\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Применяя к уравнению (4) операцию усреднения по τ, получим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} + u_0(x) = 0; \\ u_0(0) = u_0(\pi) = 0; \\ (u_0(x), \sin x) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, $u_0(x) = 0$. Возвращаясь к (4), с учетом условия $\langle y_2(x,\tau)\rangle = 0$, получим $y_2(x,\tau) = -D_{-3}\sin x\, x\cos\tau - \frac{1}{6}\ D_{-4}\sin 2x\, x\cos\tau + \frac{1}{4}D_{-4}\sin x\, x^2\cos 2\tau - 2D_{-4}\cos x\sin\tau$.

Перейдем к погранслойным слагаемым. Получим задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_2^1(\xi)}{\partial \xi^2} = 0; \\ w_2^1(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 w_2^2(\eta)}{\partial \eta^2} = 0; \\ w_2^2(\eta)\big|_{\eta=\infty} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $w_2^1(\xi) = w_2^2(\eta) \equiv 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_2^1(\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_2^1(\xi,\tau)}{\partial \xi^2}; \\ \big\langle z_2^1(\xi,\tau)\big\rangle = 0; \\ z_2^1(\xi,\tau)\big|_{\xi=\infty} = 0; \\ z_2^1(0,\tau) = 2D_{-4}\sin\tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial z_2^2(\eta,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_2^2(\eta,\tau)}{\partial \eta^2}; \\ \big\langle z_2^2(\eta,\tau)\big\rangle = 0; \\ z_2^2(\eta,\tau)\big|_{\eta=\infty} = 0; \\ z_2^2(0,\tau) = -2D_{-4}\sin\tau. \end{cases}$$

Вернемся к этим задачам после нахождения коэффициента D_{-4}.

Приравняем теперь регулярные слагаемые при степени ω^0:

$$\begin{gathered}\frac{\partial y_3(x,\tau)}{\partial\tau}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1\right)\left(u_1(x)+y_1(x,\tau)+\frac{1}{6}\,C_{-3}\sin 2x\right)\\+\Big(C_{-3}a_0(x)+C_{-4}a_1(x)+y_{-1}(x,\tau)\Big)\cos x\\+\Big(u_1(x)+C_{-2}a_0(x)+C_{-3}a_1(x)+y_1(x,\tau)\Big)\,x\sin\tau+\cos 2x+\cos x\cos\tau.\end{gathered}\tag{5}$$

Применяя к уравнению (5) операцию усреднения по τ, составим задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_1(x)}{\partial x^2}+u_1(x)=-\frac{1}{6}C_{-4}\cos x\sin 2x+C_{-4}\,x\cos x-\cos 2x;\\ u_1(0)=u_1(\pi)=0;\\ (u_1(x),\sin x)=0.\end{cases}$$

Откуда, $C_{-4}=-\frac{16}{7\pi}$, $u_1(x)=-\frac{1}{3}\cos x+\frac{2}{3\pi}\,x\cos x+\frac{4}{7\pi}\,x^2\sin x+\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{42\pi}\sin 3x$,

$$z_1^1(\xi,\tau)=-\frac{16}{7\pi}\left(e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}+e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}\right)\sin\tau-\frac{16}{7\pi}i\left(e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}\right)\cos\tau,$$

$$z_1^2(\eta,\tau)=\frac{16}{7\pi}\left(e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}+e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}\right)\sin\tau+\frac{16}{7\pi}i\left(e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}\right)\cos\tau.$$

Приравняем регулярные слагаемые при следующей степени $(\omega^{-\frac{1}{2}})$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial y_4(x,\tau)}{\partial\tau}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1\right)\left(u_2(x)+y_2(x,\tau)+\frac{1}{6}\,D_{-3}\sin 2x\right)\\+\Big(D_{-3}a_0(x)+D_{-4}a_1(x)+y_0(x,\tau)\Big)\cos x\\+\Big(u_2(x)+D_{-2}a_0(x)+D_{-3}a_1(x)+y_2(x,\tau)\Big)\,x\sin\tau.\end{gathered}\tag{6}$$

Применяя к (6) операцию усреднения по τ, получим задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_2(x)}{\partial x^2}+u_2(x)=-\frac{1}{6}D_{-4}\cos x\sin 2x+D_{-4}\,x\cos x;\\ u_2(0)=u_2(\pi)=0;\\ (u_2(x),\sin x)=0.\end{cases}$$

Отсюда, $D_{-4}=0$, $u_2(x)=z_2^1(\xi,\tau)=z_2^2(\eta,\tau)=0$.

В результате находим

$$\begin{gathered}u(x,t)=\frac{16}{7\pi}\,\omega^2\sin x+\omega\left(\frac{3}{7}\sin x+\frac{8}{21\pi}\sin 2x-\frac{16}{7\pi}\,x\sin x\cos\omega t\right)\\-\frac{1}{3}\cos x+\frac{2}{3\pi}\,x\cos x+\frac{4}{7\pi}\,x^2\sin x+\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{42\pi}\sin 3x\\+\left(\frac{82}{567}\frac{1}{\pi}+\frac{105109}{60480}-\frac{95}{504}\pi-\frac{206}{504}\pi^2-\frac{23}{504}\pi^3\right)\sin x\\+\frac{3}{42}\sin 2x-\frac{3}{7}\sin x\,x\cos\omega t-\frac{8}{21\pi}\sin 2x\,x\cos\omega t+\frac{4}{7\pi}\sin x\,x^2\cos 2\omega t+\frac{32}{7\pi}\cos x\sin\omega t\\-\frac{16}{7\pi}\left[e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}+e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}\right]\sin\omega t-\frac{16}{7\pi}i\left[e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\xi}\right]\cos\omega t\\+\frac{16}{7\pi}\left[e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}+e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}\right]\sin\omega t+\frac{16}{7\pi}i\left[e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\eta}\right]\cos\omega t+\ldots\end{gathered}$$

Литература

1. *До Н. Т., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Дифференц. уравнения.—2012.—Т. 48, № 8.—С. 1190–1192.
2. *До Н. Т., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2011.—Т. 51, № 6.—С. 1043–1055.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 3–80.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.

Статья поступила 20 ноября 2012 г.

Гусаченко Валентин Васильевич
Южный федеральный университет,
магистрант факультета математики,
механики и компьютерных наук
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `lestat.anarhist@yandex.ru`

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `vleven@math.rsu.ru`

ASYMPTOTIC INTEGRATION OF THE LINEAR PARABOLIC PROBLEM WITH THE HIGH FREQUENCY COEFFICIENTS IN THE CRITICAL CASE

Gusachenko V. V., Levenshtam V. B.

A concrete (illustrative) example of the linear parabolic problem with two independent variables and high-frequency coefficients in time is considered. The corresponding stationary homogeneous averaged problem is degenerate. Using the method developed recently for an ordinary differential equations [1] and the method of boundary layer a full formal asymptotics of the periodic solution in time is constructed.

Key words: parabolic problem, high-frequency coefficient, averaged problem, full asymptotics.