Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 32–40

УДК **517.956**

О ФУНКЦИИ ГРИНА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ[1]

Р. Ч. Кулаев

Работа посвящена анализу функции Грина смешанной задачи параболического типа, заданной на геометрическом графе. Изучаются вопросы существования, непрерывности и положительности функции Грина.

Ключевые слова: краевая задача на графе, функция Грина для параболического уравнения на графе.

В центре внимания работы дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x,t)\,u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

в котором $(x,t) \in \Gamma \times (0,T] = \Gamma_T$, Γ — геометрический граф.

В каждой граничной вершине a графа Γ ставятся условия Дирихле

$$u(a,t) = 0, \quad a \in \partial\Gamma,\ t \in (0,T]. \tag{2}$$

А в каждой внутренней вершине a на решение уравнения (1) накладываются условия непрерывности и одно условие согласования

$$\begin{gathered} u_k(a,t) - u_{k_0}(a,t) = 0, \quad k, k_0 \in I(a), \\ \sum_{k\in I(a)} \alpha_k(a,t)\frac{\partial u_k}{\partial x}(a,t) = 0, \quad a \in J(\Gamma),\ t \in (0,T]. \end{gathered} \tag{3}$$

В условиях согласования (3) считаем, что все производные посчитаны в направлении от вершины a.

В начальный момент времени $t = 0$ ставится условие

$$u(x,0) = \psi(x). \tag{4}$$

На протяжении всей работы считаем выполненными следующие предположения:

(I) Коэффициенты оператора L равномерно непрерывны по Гёльдеру (с показателем ω) в $\overline{\Gamma}_T$, причем

$$|p|_\omega \leqslant M, \quad |q|_\omega \leqslant M, \quad |c|_\omega \leqslant M,$$

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210.

где

$$|u|_\omega = \sup_{(x,t)\in\overline{\Gamma}_T} |u(x,t)| + \sup_{(x,t),(x_0,t_0)\in\overline{\Gamma}_T} \frac{|u(x,t)-u(x_0,t_0)|}{(|x-x_0|^2+|t-t_0|)^{\frac{\omega}{2}}},$$

$\inf p(x,t) > 0$ и $c(x,t) \leqslant 0$ при $(x,t) \in \overline{\Gamma}_T$.

(II) Функции $\psi(x) \in C^1[\overline{\Gamma}]$; при каждом $a \in J(\Gamma)$ функции $\alpha_k \in C[0,T]$. Так же полагаем, что $\alpha_k > 0$ на $[0,T]$.

На сегодняшний день параболические задачи на сетях изучены достаточно хорошо. Наиболее крупные циклы работ зарубежных авторов принадлежат S. Nicaise, F. Ali-Mehmeti, G. Lumer, J. von Below (см. работы [1–5] и библиографию к ним). Эти исследования связаны, в основном, с использованием методов функционального анализа, для которых безразлична структура графа.

Другой подход к изучению краевых задач на сетях разработан Ю. В. Покорным и его научной группой, ими было предложено рассматривать систему как единый объект — геометрический граф [6]. Такой подход позволил получить ряд результатов, ставших основой для дальнейших исследований. Это прежде всего принцип максимума, который в данном случае принимает классический вид — максимум решения на всем графе совпадает с максимумом на границе графа.

Исследования по данной тематике проводились как для одной, так и для многих пространственных переменных. В работах О. М. Пенкина рассматриваются уравнения заданные на стратифицированных множествах. В частности, были получены неравенство Пуанкаре и принцип максимума для дифференциального уравнения на стратифицированном множестве [6–8], явившиеся основой доказательства разрешимости эллиптических краевых задач как в слабой, так и в сильной постановках [6, 9].

В настоящей работе мы изучаем качественные свойства функции Грина краевой задачи (1)–(4). Будут рассмотрены вопросы существования, непрерывности и положительности функции Грина. Отметим, что для стационарного случая эти вопросы изучены и достаточно подробно изложены в монографии [6].

1. Предварительные сведения и обозначения

Под геометрическим графом в настоящей работе понимается одномерное стратифицированное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$ и обозначаемое через Γ [6]. Ребра графа — это пространственные гладкие кривые, не имеющие самопересечений. Вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. Считая ребра графа занумерованными, обозначаем их через γ_k, а вершины — через a_j или b_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер). Пусть $V(\Gamma)$ — множество всех вершин графа Γ. Обозначим через $J(\Gamma)$ множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа не принадлежащие $J(\Gamma)$ будем называть граничными и обозначать их через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_k, то будем говорить, что ребро γ_k примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a обозначим $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$. Через $\overset{\circ}{\Gamma}$ обозначим множество, получаемое из графа Γ удалением всех его вершин, т. е. $\overset{\circ}{\Gamma} = \Gamma \setminus V(\Gamma)$.

Для $0 < t < T$ ведем обозначения

$$\Gamma_t = \Gamma \times (0,t), \quad \partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t), \quad J(\Gamma_t) = J(\Gamma) \times (0,t), \quad V(\Gamma_t) = V(\Gamma) \times (0,t).$$

Отдельные обозначения примем для $t = 0$ и $t = T$

$$\Gamma_T = \Gamma \times (0, T], \quad \Gamma_0 = \Gamma \times \{t = 0\}.$$

Под функцией на графе понимается отображение $u : \overset{\circ}{\Gamma} \to \mathbb{C}$. Через u_k будем обозначать сужение функции u на ребро γ_i. Если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim_{x \to a} u_k(x)$, $x \in \gamma_k$. Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ на каждом ребре $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается, что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений.

Через $C^k[\Gamma]$ обозначаем пространство функций, имеющих равномерно непрерывные производные до k-го порядка на каждом ребре графа. Через $C^k(\Gamma)$ обозначаем подпространство из $C^k[\Gamma]$ функций непрерывных на всем графе Γ (от производных непрерывность не требуется). Через $C^{k,s}(\Gamma_T)$ будем обозначать множество функций, определенных на Γ_T принадлежащих при каждом $t \in (0, T]$ пространству $C^k(\Gamma)$ и при каждом $x \in \Gamma$ — пространству $C^s[0, T]$.

Далее мы будем ссылаться на следующие результаты:

Теорема 1 (существование и единственность) [10]**.** *Пусть для каждой вершины $a \in V(\Gamma)$ заданы функции $r_k(a, t)$ и $h(a, t)$, $k \in I(a)$, причем $r_k \in C[0, T]$, а функция $h(a, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} < \omega \leqslant 1$. Тогда существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию* (4) *и неоднородным краевым условиям*

$$\begin{gathered} u(a, t) = r(a, t), \quad a \in \partial\Gamma, \ t \in (0, T], \\ u_k(a, t) - u_{k_0}(a, t) = r_k(a, t), \quad k, k_0 \in I(a), \\ \sum_{k \in I(a)} \alpha_k(a, t) \frac{\partial u_k}{\partial x}(a, t) = h(a, t), \quad a \in J(\Gamma), \ t \in (0, T]. \end{gathered} \tag{3'}$$

В работе [11] для задачи (1)–(4) для случая графа, состоящего из последовательно соединенных ребер, установлен принцип максимума, а в работе [5] этот результат переносится и на случай полулинейного уравнения на произвольном графе.

Теорема 2 (принцип максимума) [5]**.** *Пусть функция $u(x, t) \in C^{2,1}(\overline{\Gamma}_T)$ удовлетворяет уравнению* (1) *и условиям* (2), (3)*. Тогда либо $u(x, t) \leqslant 0$ на Γ_T, либо $u(x, t)$ имеет положительный максимум на $\overline{\partial\Gamma_T \bigcup \Gamma_0}$.*

Теорема 3 (непрерывная зависимость от начальных данных) [11]**.** *Пусть $u(x, t)$ и $\overline{u}(x, t)$ — решения, соответственно, уравнений $Lu = f(x, t)$ и $Lu = \overline{f}(x, t)$, удовлетворяющие условиям* (3′) *с правыми частями $r_k = \overline{r}_k \equiv 0$ и h, $\overline{h}$, и условиям* (4) *с функциями ψ, $\overline{\psi}$. Тогда*

$$\|u - \overline{u}\|_{C(\overline{\Gamma}_T)} \leqslant C\Big(\max_{\overline{\Gamma}_T} |f - \overline{f}| + \max_{a \in V(\Gamma)} \|h(a, \cdot) - \overline{h}(a, \cdot)\|_{C[0,T]} + \|\psi - \overline{\psi}\|_{C(\overline{\Gamma})}\Big),$$

где C не зависит от u и $\overline{u}$.

2. Существование функции Грина задачи Дирихле

Определение. Функция $G(x, t; \xi, \tau)$, определенная для $(x, t; \xi, \tau) \in \{\Gamma \times (0, T]\} \times \{\overset{\circ}{\Gamma} \times [0, T)\}$, $t > \tau$, называется *функцией Грина* для начально-краевой задачи (1)–(4) в Γ_T, если для любого τ из интервала $0 \leqslant \tau < T$ и для любой непрерывной на $\Gamma_T \bigcap \{t = \tau\}$ функции ψ, удовлетворяющей условиям (2), (3), функция

$$u(x,t) = \int\limits_{\Gamma_T \bigcap \{t=\tau\}} G(x,t;\xi,\tau)\psi(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

является решением уравнения $Lu = 0$ в $\Gamma_T \bigcap \{\tau < t \leqslant T\}$, удовлетворяет на $V(\Gamma_T) \bigcap \{\tau < t \leqslant T\}$ краевым условиям (2), (3) и начальному условию

$$\lim_{t \searrow \tau} u(x,t) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Gamma}. \tag{6}$$

Теорема 4. *Существует единственная функция Грина* $G(x,t;\xi,\tau)$ *начально-краевой задачи* (1)–(4).

$\lhd$ Чтобы доказать существование функции Грина G, мы сначала на каждом ребре $\gamma_k \in \Gamma$ продолжим коэффициенты p_k, q_k и c_k оператора L на открытое множество $\gamma_k^0 \supset \overline{\gamma}_k$ так, чтобы выполнялось условие (I) и обозначим через $H_k(x,t;\xi,\tau)$ фундаментальное решение уравнения (1), суженного на цилиндр $\overline{\gamma}_k^0 \times [0, T+1]$. В силу результатов [11] фундаментальное решение $H(x,t;\xi,\tau)$ для уравнения $Lu = 0$ на $\overline{\Gamma}_T$ существует и, сверх того, сужения функций H, $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, $\frac{\partial H}{\partial t}$ на ребра графа непрерывны по совокупности переменных $(x,t;\xi,\tau)$, когда x и ξ изменяются в γ_k, $k = \overline{1, 2m}$, и $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$.

Пусть $Q(x,t;\xi,\tau)$ обозначает решение уравнения

$$LQ = 0, \quad x \in \Gamma, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{7}$$

удовлетворяющее при $t = \tau$ начальному условию

$$Q = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}, \tag{8}$$

а при $\tau < t \leqslant T$ — условиям в вершинах графа

$$\begin{gathered} Q(a,t;\xi,\tau) = -H(a,t;\xi,\tau), \quad a \in \partial\Gamma, \\ Q_k(a,t;\xi,\tau) - Q_{k_0}(a,t;\xi,\tau) = H_{k_0}(a,t;\xi,\tau) - H_k(a,t;\xi,\tau), \quad k, k_0 \in I(a), \\ \sum_{k \in I(a)} \alpha_k(a,t)\, \frac{\partial Q_k}{\partial x}(a,t;\xi,\tau) = -\sum_{k \in I(a)} \alpha_k(a,t)\, \frac{\partial H_k}{\partial x}(a,t;\xi,\tau), \quad a \in J(\Gamma). \end{gathered} \tag{9}$$

При этом предполагается, что $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\xi \in \overset{\circ}{\Gamma}$.

Так как $H(x,t;\xi,\tau) \to 0$ и $\frac{\partial H}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) \to 0$ при $t \to \tau$, если $x \neq \xi$ (см. [1]), то правые части условий (9) согласованы с начальными данными из (8). Из свойств фундаментального решения H и теоремы 1 следует, что единственное решение задачи (7)–(9) существует. Тогда, очевидно, функция $G(x,t;\xi,\tau) = H(x,t;\xi,\tau) + Q(x,t;\xi,\tau)$ является функцией Грина задачи (1)–(4).

Доказывая единственность, предположим, что G_1 и G_2 — две функции Грина, и рассмотрим функцию

$$v(x,t) = \int\limits_{\Gamma_T \bigcap \{t=\tau\}} \big[G_1(x,t;\xi,\tau) - G_2(x,t;\xi,\tau)\big]\psi(\xi)\, d\xi, \tag{10}$$

где $\psi(x)$ — любая непрерывная в $\Gamma_T\bigcap\{t=\tau\}$ функция, удовлетворяющая условиям (2), (3). Очевидно, $v(x,t)$ — решение однородной задачи (1)–(3), (8). Отсюда по принципу максимума $v\equiv 0$ в $\Gamma_T\bigcap\{\tau<t\leqslant T\}$.

Для любых фиксированных $(x_0,t_0)\in\Gamma_T$, $(\xi_0,\tau_0)\in\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)$, $t_0>\tau_0$ определим последовательность непрерывных неотрицательных на Γ функций $\{\psi^n(\xi)\}$, удовлетворяющих условиям (2), (3), таких, что

$$\psi^{[n]}(\xi)=0,\quad |\xi-\xi_0|>\frac{1}{n},\ \int\limits_{\Gamma}\psi^{[n]}(\xi)\,d\xi=1.$$

Обозначим через $v^{[n]}(x,t)$ функцию $v(x,t)$ из (10), соответствующую $\psi=\psi^{[n]}$, $\tau=\tau_0$. Тогда $0=\lim_{n\to\infty}v^n(x_0,t_0)=G_1(x_0,t_0;\xi_0,\tau_0)-G_2(x_0,t_0;\xi_0,\tau_0)$. $\rhd$

Доопределяя функцию $G(x,t;\xi,\tau)$ нулем на $\{\Gamma\times(0,T]\}\times\{\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)\}$, $t\leqslant\tau$, получим

Следствие 1. *Функция Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ непрерывна вне диагонали $(x,t)=(\xi,\tau)$.*

$\lhd$ Достаточно показать, что функция Q является непрерывной функцией точки $(x,t;\xi,\tau)$ в $\{\Gamma\times(0,T]\}\times\{\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)\}$, $t>\tau$.

Пусть (ξ_0,τ_0) точка в $\gamma\times(0,T)$, расстояние от которой до точки (ξ,τ) меньше δ. Положим, для определенности $\tau_0>\tau$. Для каждого ребра $\gamma_i\in\Gamma$ зададим функцию $\zeta_i(x,t)$, определенную на параболической границе множества $\gamma_i\times[\tau,T]=[a_{i_1},a_{i_2}]\times[\tau,T]$ следующим образом: $\zeta_i(x,\tau)\equiv 0$, $x\in\gamma_i$; при $i=k_0\in I(a_j)$ полагаем $\zeta_i(a_j,t)\equiv 0$ (значение k_0 определяется в условиях (3)), а при $i\neq k_0\in I(a_j)$

$$\zeta_i(a_j,t)=\bigl(H_{k_0}(a_j,t;\xi,\tau)-H_k(a_j,t;\xi,\tau)\bigr)-\bigl(H_{k_0}(a_j,t;\xi_0,\tau_0)-H_k(a_j,t;\xi_0,\tau_0)\bigr).$$

Тогда, используя теоремы о продолжении функций [12], на $\Gamma\times[\tau,T]$ можно определить функцию $\zeta(x,t)$ так, что $\zeta_i\in C^{2,1}(\gamma_i\times[\tau,T])$ и $\|\zeta_i\|_{C^{2,1}(\gamma_i\times[\tau,T])}\leqslant C\max_j\|\zeta_i(a_j,\cdot)\|_{C^1[\tau,T]}$, где C — абсолютная константа.

Пусть $Q(x,t;\xi,\tau)$ и $Q(x,t;\xi_0,\tau_0)$ решения задачи (7)–(9) для (ξ,τ) и (ξ_0,τ_0) соответственно. Рассмотрим функцию $W(x,t)=Q(x,t;\xi,\tau)-Q(x,t;\xi_0,\tau_0)$, также являющуюся решением задачи (7)–(9) при соответствующих правых частях в (8), (9). Представим W в виде $W(x,t)=w(x,t)+\zeta(x,t)$. Поскольку начальные значения решения $W(x,t)$ задачи (7)–(9) при соответствующих правых частях в (8), (9) равны нулю, а значения на $V(\Gamma)\times\{\tau\leqslant t\leqslant\tau_0\}$ за счет выбора δ можно сделать произвольно малыми, то из теоремы 3 о непрерывной зависимости решения от исходных данных задачи, примененной к $w(x,t)$, как решению неоднородного параболического уравнения, следует, что $w(x,t)$ можно сделать произвольно малой на $\Gamma_T\bigcap\{t=\tau_0\}$, если δ достаточно мало. То же самое, очевидно, справедливо на $V(\Gamma)\times\{\tau_0\leqslant t\}$. Отсюда на основании теоремы 2 находим, что в $\Gamma_T\bigcap\{\tau_0<t\leqslant T\}$ при достаточно малом δ величина $\max|w(x,t)|$ будет меньше любого наперед заданного числа. Откуда следует неравенство

$$|Q_k(x,t;\xi,\tau)-Q_k(x,t;\xi_0,\tau_0)|<\varepsilon$$

при достаточно малом δ. При этом δ не зависит от (ξ,τ) при условии, что (ξ,τ) принадлежит замкнутому подмножеству из $\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)$.

Поскольку Q непрерывная функция точки (x,t) в Γ_T, $t>\tau$, для каждой фиксированной точки $(\xi,\tau)\in\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)$, то она является также непрерывной функцией точки $(x,t;\xi,\tau)$ в $\Gamma_T\times\{\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)\}$, $t>\tau$. Откуда следует непрерывность функции Грина на $\Gamma_T\times\{\overset{\circ}{\Gamma}\times[0,T)\}$, $t>\tau$. $\rhd$

Из построения функции G, проведенного в теореме 4, сразу вытекает утверждение.

Следствие 2. *Как функция* $(x,t) \in \Gamma_T$, $G(x,t;\xi,\tau)$ *удовлетворяет уравнению* $LG = 0$. *Кроме того, для каждой точки* $(\xi,\tau) \in \overset{\circ}{\Gamma} \times [0,T)$, *функция* $G(x,t;\xi,\tau)$ *удовлетворяет условиям* (2), (3).

Теорема 2. *Функция Грина задачи* (1)–(4) *строго положительна в* $\{\Gamma_T \setminus \partial\Gamma_T\} \bigcap \{\tau < t \leqslant T\}$.

$\lhd$ Для любой непрерывной неотрицательной на $\Gamma_T \bigcap \{t = \tau\}$ функции ψ, удовлетворяющей условиям (2), (3), определим функцию

$$v(x,t) = \int\limits_{\Gamma_T \bigcap \{t=\tau\}} G(x,t;\xi,\tau)\psi(\xi)\,d\xi.$$

В силу определения функции Грина $Lv = 0$ при $x \in \Gamma$, $\tau < t \leqslant T$, $v(x,\tau) = \psi(x) \geqslant 0$. Применение принципа максимума к $v(x,t)$ дает неравенство $v(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \Gamma \times (\tau,T]$. Определяя, как и в доказательстве теоремы 4, последовательность $\{\psi^{[n]}(\xi)\}$ и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} v^{[n]}(x_0,t_0) = G(x_0,t_0;\xi_0,\tau_0)$$

для всех $(x_0,t_0) \in \Gamma_T$, $(\xi_0,\tau_0) \in \overset{\circ}{\Gamma} \times [0,T)$, $t_0 > \tau_0$.

Далее заметим, что для любой фиксированной точки $(\xi,\tau) \in \overset{\circ}{\Gamma} \times [0,T)$ функция $G(x,t;\xi,\tau) \neq \mathrm{const}$ на $\Gamma \times (\tau,T]$. Поэтому при любых фиксированных (ξ,τ) к каждому сужению G_k функции G на $(x,t) \in \gamma_k \times (\tau,T]$ применим обобщенный принцип максимума [12, гл. II, § 2], согласно которому из соотношений $G_k \geqslant 0$ в $\{\gamma_k \setminus \partial\gamma_k\} \times (0,t_0]$, $LG_k \leqslant 0$ в $\{\gamma_k \setminus \partial\gamma_k\} \times (0,t_0]$ и $G_k(x_0,t_0) = 0$ в некоторой точке $(x_0,t_0) \in \{\gamma_k \setminus \partial\gamma_k\} \times (0,T]$, следует, что $G_k \equiv 0$ в $\{\gamma_k \setminus \partial\gamma_k\} \times (0,t_0]$. Из чего, в свою очередь, следует $G_k > 0$ на $\{\gamma_k \setminus \partial\gamma_k\} \times (0,t_0]$.

Остается доказать строгую положительность функции $G(x,t;\xi,\tau)$ на $J(\Gamma_T)$ для каждой точки $(\xi,\tau) \in \overset{\circ}{\Gamma} \times [0,T)$. Предположим противное. Тогда существует точка $(a,t_0) \in J(\Gamma_T)$, для которой при некоторых $(\xi_0,\tau_0) \in \overset{\circ}{\Gamma} \times [0,T)$ будет $G(a,t_0;\xi_0,\tau_0) = 0$. Учитывая, что $G_k(x,t;\xi_0,\tau_0) > 0$ для всех $(x,t) \in \{\gamma_k \setminus \partial\gamma_k\} \times (0,T]$, $k \in I(a)$ и $\alpha_k(a,t_0) > 0$, получаем

$$\sum_{k\in I(a)} \alpha_k(a,t_0) \frac{\partial G_k}{\partial x}\,(a,t_0;\xi_0,\tau_0) > 0,$$

где производные посчитаны от вершины a.

Последнее неравенство противоречит тому факту, что функция $G(x,t;\xi_0,\tau_0)$ удовлетворяет условию согласования (3) в точке (a,t_0) (следствие 2). $\rhd$

3. Функции Грина сопряженного оператора

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L^*u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + c(x,t)v - \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{11}$$

с условиями в вершинах графа Γ

$$v(a,t)=0, \quad a\in\partial\Gamma,\ t\in(0,T], \tag{12}$$

$$\begin{gathered} v_k(a,t)-\delta_k^*(a,t)u_{k_0}(a,t)=0, \quad k,k_0\in I(a), \\ \sum_{k\in I(a)}\alpha_k^*(a,t)\frac{\partial v_k}{\partial x}(a,t)=0, \quad a\in J(\Gamma),\ t\in(0,T]. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь

$$\delta_k^*(a,t)=\frac{p_{k_0}(a,t)\,\alpha_k(a,t)}{p_k(a,t)\,\alpha_{k_0}(a,t)}; \quad \alpha_k^*(a,t)=p_k(a,t).$$

Дифференциальный оператор L^*, порожденный дифференциальным выражением (11) и краевыми условиями (12), (13), назовем сопряженным к оператору L, порожденному дифференциальным выражением (1) и условиями (2), (3).

Из условий (2), (3) и (12), (13) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_T} v\,Lu-u\,L^*v\,dx\,dt=0$$

для любых функций u и v, удовлетворяющих условиям (2), (3) и (12), (13), соответственно, и равным нулю на $\big(\Gamma\times\{t=0\}\big)\bigcup\big(\Gamma\times\{t=T\}\big)$.

Фундаментальным решением уравнения $L^*v=0$ назовем функцию $H^*(x,t;\xi,\tau)$, определенную для всех $(x,t)\in\overline{\Gamma}_T$, $(\xi,\tau)\in\overline{\Gamma}_T$, $t<\tau$, которая удовлетворяет следующим условиям:

a) для всех фиксированных $(\xi,\tau)\in\overline{\Gamma}_T$ она, как функция (x,t), $x\in\Gamma$, $t<\tau$, удовлетворяет уравнению $L^*v=0$;

b) для каждой функции $\psi(x)\in C[\Gamma]$

$$\lim_{t\uparrow\tau}\int\limits_{\Gamma} H^*(x,t;\xi,\tau)\,\psi(\xi)\,d\xi=\psi(x).$$

Функция H^*, как и H, может быть построена по методу Е. Леви (см., например, [13]) в виде суммы двух слагаемых: главного члена, имеющего нужную особенность при $x=\xi$, $t=\tau$, и некоторого добавочного слагаемого (см. [10]). Причем в качестве параметрикса берется функция

$$Z^*(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & \tau\leqslant t;\\ \frac{\sqrt{p(\xi,\tau)}}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}}\exp\Big(-\frac{p(\xi,\tau)(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}\Big), & a_k\leqslant x,\ \xi\leqslant b_k,\ \overline{\gamma}_k=[a_k,b_k];\\ 0, & x\in\overline{\gamma}_k,\ \xi\in\overline{\gamma}_n,\ k\neq n.\end{cases}$$

Функция Z^* удовлетворяет уравнению $L^*v=0$ с «замороженными» в точке (ξ,τ) коэффициентами. Второе слагаемое ищется в виде интегрального оператора с ядром Z^*. Функция Грина $G^*(x,t;\xi,\tau)$ оператора L^* определяется как функция точки $(x,t;\xi,\tau)\in\{\Gamma\times[0,T]\}\times\{\overset{\circ}{\Gamma}\times(0,T]\}$ при $t<\tau$ и такая, что для любого τ из $0\leqslant t<\tau$ и для любой непрерывной на $\Gamma_T\bigcap\{t=\tau\}$ функции ψ, удовлетворяющей условиям (12), (13), функция

$$v(x,t)=\int\limits_{\Gamma_T\bigcap\{t=\tau\}} G^*(x,t;\xi,\tau)\psi(\xi)\,d\xi$$

удовлетворяет уравнению $L^*v = 0$ в $\Gamma_T \bigcap \{0 \leqslant t < \tau\}$, а на $V(\Gamma_T) \bigcap \{\tau < t \leqslant T\}$ — краевым условиям (12), (13) и начальному условию

$$\lim_{t \uparrow \tau} v(x,t) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Gamma}.$$

Существование и единственность функции Грина сопряженного оператора можно доказать тем же способом, что и для G, заменив предварительно в уравнении $L^*v = 0$ t на $-t$. Затем также получаем, что для $(x,t) \in \Gamma_T \bigcap \{0 \leqslant t < \tau\}$ функция G^* удовлетворяет уравнению $L^*G^* = 0$ и краевым условиям (12), (13).

Теорема 5. *Для любых двух точек* (x,t) *и* (ξ,τ) *из* $\overset{\circ}{\Gamma} \times (0,T]$, $t > \tau$,

$$G(x,t;\xi,\tau) = G^*(\xi,\tau;x,t). \tag{14}$$

$\lhd$ Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} u(y,\sigma) &= G(y,\sigma;\xi,\tau), \\ v(t,\sigma) &= G^*(y,\sigma;x,t) \end{aligned}$$

для $y \in \overset{\circ}{\Gamma}$ и $\sigma \in (\tau,t)$.

Рассматривая интеграл по области $\overset{\circ}{\Gamma} \times (\tau+\varepsilon, t-\varepsilon)$ от произведения $v\,Lu$ и учитывая свойства функций G, G^*, интегрированием по частям получим

$$\int\limits_{\overset{\circ}{\Gamma}} u(y,t-\varepsilon)\, G^*(y,t-\varepsilon;x,t)\,dy = \int\limits_{\overset{\circ}{\Gamma}} v(y,\tau+\varepsilon)\, G(y,\tau+\varepsilon;\xi,\tau)\,dy.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ следует (14). $\rhd$

Литература

1. *Ali-Mehmeti F., von Below J. A., Nicaise S.* Partial Differential Equations on Multistructures: Proceedings of a Conference Held in Luminy, France.—New York: Marcel Dekker, 2001.—256 p.—(Ser. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.; Vol. 219).
2. *von Below J. A.* Classical solvability of linear parabolic equations on networks // J. Diff. Eq.—1998.—Vol. 75.—P. 316–337.
3. *Gen Qi Xu, Mastorakis N. E.* Differential Equations on Metric Graph.—Published by WSEAS Press, 2010.—242 p.
4. *von Below J. A.* A Qualitative theory for parabolic problems under dynamical boundary conditions // J. of Inequal. and Appl.—2000.—Vol. 5.—P. 467–486.
5. *von Below J. A.* A maximum principle for semilinear parabolic network equations // Diff. Eq. with Appl. in Biology, Physics and Engineering.—New York: M. Dekker Inc., 1991.—P. 37–45.
6. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
7. *Пенкин О. М.* О принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе // Докл. АН.—1997.—Т. 352, № 4.—С. 462–465.
8. *Пенкин О. М.* О принципе максимума для эллиптического уравнения на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения.—1998.—Т. 34, № 10.—С. 1433–1444.
9. *Пенкин О. М., Богатов Е. М.* О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Мат. заметки.—2000.—№ 6.—С. 874–876.
10. *Кулаев Р. Ч.* О разрешимости параболической задачи на графе // Уфимский мат. журн.—2010.—Т. 2, вып. 4.—С. 74–85.

11. *Камынин Л. И., Масленникова В. Н.* О принципе максимума для уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн.—1961.—Т. 2, № 3.—С. 384–399.
12. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.—М.: Наука, 1989.—464 с.
13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.—М.: Мир, 1969.—427 с.

Статья поступила 6 марта 2012 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kulaev@smath.ru

ABOUT GREEN'S FUNCTION OF A PARABOLIC PROBLEM ON A GRAPH

Kulaev R. Ch.

The work is devoted to Green's function of the mixed boundary problem for equation of parabolic type on geometrical graph. Existence, continuity and positivity of Green's function are studied.

Key words: boundary problem on a graph, Green's function, parabolic equation, geometrical graph.