Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 52–62

УДК **517.633**

О ВЗАИМОСВЯЗИ ДВУХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА. II[1]

В. Б. Левенштам

Статья дополняет работу автора [1], посвященную вопросам разрешимости начально-краевой задачи для уравнений Навье — Стокса с полиномиально зависящей от неизвестной (скорости) массовой силой. Здесь установлена локальная разрешимость указанной задачи в обобщенном смысле и изложено доказательство одной важной леммы из [1].

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, локальная разрешимость, проектор Вейля.

Данная статья является продолжением статьи [1], но ее можно читать, по существу, независимо. Напомним, что в [1] рассматривается начально-краевая задача для уравнений Навье — Стокса с полиномиально зависящей от неизвестной (скорости) массовой силой. Там введены определения решения и обобщенного решения указанной задачи и получены условия, при которых обобщенное решение, если оно существует, является обычным решением. В настоящей, заключительной, части работы: 1) показано, что обобщенное решение данной задачи существует, по крайней мере, локально; 2) проведено доказательство важной леммы 1 статьи [1], которая впервые была сформулирована в работе И. Б. Симоненко [2], где лишь намечен путь ее доказательства. В [1] имеются ссылки (вместо доказательства леммы 1) на монографию И. Б. Симоненко [3] и заметку автора [4], а также замечание о том, что в монографии [3] доказательство для нашего случая (граница области $\partial\Omega \in C^2$) — неполное (оно полное для $\partial\Omega \in C^5$, но переход к $\partial\Omega \in C^2$ представлен лишь схематично). Ввиду труднодоступности сборника [4] мы воспроизводим здесь содержащееся в нем полное доказательство леммы сразу для $\partial\Omega \in C^2$. Отметим еще, что 3) некоторые важные детали [1], которые используются и в данной статье, представлены здесь подробнее. Это также является целью данной заметки.

Результаты [1] и данной статьи потребовались автору для обоснования метода усреднения для уравнений Навье — Стокса с полиномиально зависящей от скорости массовой силой, содержащей высокочастотные слагаемые с большими амплитудами. Работа по обоснованию направлена в печать. Она, в свою очередь, примыкает к исследованиям автора (см., например, [5–10]) асимптотических свойств некоторых важных классов эволюционных уравнений в частных производных с большими высокочастотными слагаемыми.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения 14.A18.21.0356 и 8210, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.

1°. Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с C^2-гладкой границей $\partial\Omega$, m — целое неотрицательное, n — натуральное, а ν и T — положительные числа. В цилиндре $Q = \bar{\Omega} \times [0, T]$ рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla P + (v, \nabla) v = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, x, t) + b(v, x, t), \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{1}$$

$$v|_{\partial\Omega \times (0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

в которой неизвестными являются вектор-функция $v(x, t)$ и функция $P(x, t)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^1$ соответственно[2], ω — большой параметр.

Будем предполагать, что вектор-функции $a_j(v, x, t)$ и $b(v, x, t)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$ имеют следующую структуру:

$$a_j = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} a_{jk}, \quad b = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} b_k,$$

где $a_{jk}(v, x, t)$ и $b_k(v, x, t)$ являются однородными формами степени k относительно компонент вектора v. Таким образом, компоненты $a_{jk\ell}$ и $b_{k\ell}$ вектор-функций a_{jk} и b_k имеют вид:

$$a_{jk\ell}(v, x, t) = \sum_{|s|=k} \overset{s}{a}_{j\ell}\,(x, t) v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3},$$

$$b_{k\ell}(v, x, t) = \sum_{|s|=k} \overset{s}{b}_{\ell}\,(x, t) v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3}.$$

Здесь $s = (s_1, s_2, s_3)$, $s_j = 0, 1, \ldots, k$, $|s| = s_1 + s_2 + s_3$, v_j $(j = 1, 2, 3)$ — компоненты вектора v. Прежде чем ввести остальные ограничения на данные задачи (1)–(3), напомним определение известного банахова пространства, которое будет часто использоваться в дальнейшем.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и B — банахово пространство. Через $C([a, b], B)$ обозначим банахово пространство непрерывных вектор-функций $u\colon\ [a, b] \to B$ с нормой

$$\|u\|_{C([a,b],B)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_B.$$

Будем рассматривать данные $\overset{s}{a}_{j\ell}(\,.\,, t)$ и $\overset{s}{b}_{\ell}(\,.\,, t)$ как вектор-функции от t со значениями в соответствующих банаховых пространствах и предполагать, что $\overset{s}{a}_{j\ell}, \overset{s}{b}_{\ell} \in C([0, T], L_\infty(\Omega))$, $v_0 \in S_{q_0}$, $q_0 > \max(3(m-1), 3)$. Здесь $S_{q_0} \equiv S_{q_0}(\Omega)$ — известное в математической гидродинамике вещественное пространство соленоидальных векторов (см. [11, 12] и п. 2° ниже).

2°. Задачу (1)–(3) можно интерпретировать как математическое обобщение известной [11, 12] модели движения вязкой несжимаемой жидкости (v — скорость жидкости, P — давление в ней) в сосуде под действием массовой силы. Обобщенная массовая сила здесь представлена правой частью первого уравнения (1). Она помимо пространственных и временной переменных x, t зависит и от скорости v движения жидкости. Систему вида (1) мы, следуя работе [2], называем уравнениями Навье — Стокса.

[2]Векторы пространства $\mathbb{R}^3$ будем считать вектор-столбцами.

Приведем некоторые результаты математической гидродинамики [11, 12], на которые будем опираться в дальнейшем.

Пусть M — множество непрерывно дифференцируемых в Ω соленоидальных (т. е. удовлетворяющих уравнению $\operatorname{div} v = 0$ в Ω) вектор-функций $v(x)$ с равной нулю на $\partial\Omega$ нормальной компонентой. Через S_q, $q > 1$, обозначим банахово пространство, являющееся замыканием множества M по норме $L_q \equiv L_q(\Omega)$:

$$\|v\|_{S_q} = \left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^q \, dx\right)^{1/q} = \left(\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} |v_j(x)|^2\right]^{q/2} dx\right)^{1/q}.$$

Через G_q обозначим банахово пространство, полученное замыканием множества градиентов гладких функций φ по норме

$$\|\nabla\varphi\|_{G_q} = \left[\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^q \, dx\right]^{1/q} = \|\nabla\varphi\|_{L_q}.$$

Пространство L_q распадается в прямую сумму своих подпространств S_q и G_q: $L_q = S_q \oplus G_q$. Связанный с этим разложением проектор $\Pi: \ L_q \to S_q$ является ограниченным оператором, причем ортогональным в случае $q = 2$.

В пространстве S_q определен оператор $A_0 = -\nu\Pi\Delta$ с областью определения $D(A_0) = \overset{\circ}{S}{}^{2}_{q}$, являющейся замыканием по норме W_q^2 множества M. Оператор A_0 замкнут, а $-A_0$ порождает в S_q аналитическую полугруппу e^{-tA_0}, $t \geqslant 0$. Более того, оператор A_0 сильно позитивен (определение см. в [13, с. 298]), а потому определены его дробные степени A_0^γ, $\gamma > 0$ [13, формула (14.15)]. Через $\overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_{q}$ будем обозначать банахово пространство, элементы которого принадлежат области определения оператора A_0^γ и снабжены нормой $\|u\|_{\overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_{q}} = \|A_0^\gamma u\|_{S_q}$.

3°. Введем определения решения и обобщенного решения начально-краевой задачи (1)–(3).

Решением задачи (1)–(3) назовем определенную в цилиндре Q трехмерную вещественную вектор-функцию $v(x,t)$, для которой найдется определенная в том же цилиндре скалярная вещественная функция $P(x,t)$ такая, что при некотором $q > 1$ будут выполнены следующие условия:

1) вектор-функции $\hat{v}(t) = v(\cdot,t)$ и $\hat{P}(t) = P(\cdot,t)$ являются непрерывными, как отображения $\hat{v} : [0,T] \to S_q$, $\hat{v} : (0,T] \to \overset{\circ}{S}{}^{2}_{q}$, $\hat{P} : (0,T] \to W_q^1(\Omega)$, и равенство (3) выполнено в S_q;

2) отображение $\hat{v} : (0,T) \to S_q$ непрерывно дифференцируемо и первое равенство (1) справедливо при всех $t \in (0,T)$ в S_q;

3) второе равенство (1) при $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T]$ и равенство (2) выполняются в обычном классическом смысле.

Прежде чем сформулировать определение обобщенного решения задачи (1)–(3) опишем известную процедуру (см., например, [13]) перехода от задачи (1)–(3) к соответствующему интегральному уравнению. Предположим на некоторое время, что $a^s_{jki} \in C([0,T], W^1_\infty)$ и пусть $v(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), $q > 3$. Подействовав на уравнение (1) проектором Π и обозначив $v(t) = \Pi v(\cdot,t) = v(\cdot,t)$, $v(0) = v(\cdot,0) = v_0$, перейдем от начально-краевой задачи (1)–(3) к задаче Коши в S_{q_0} для абстрактного параболического уравнения:

$$\frac{dv}{dt} + A_0 v = \Pi\left[-(v,\nabla)v + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}a_j(v,\cdot,t) + b(v,\cdot,t)\right] \equiv \Pi\psi_1(v,t) \equiv \psi(v,t),$$
$$t \in (0,T], \quad v(0) = v_0.$$

Из результатов [11, 13] теперь следует, что всякое решение $v(\cdot,t)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0}\psi[v(\tau),\tau]\,d\tau \equiv e^{-tA_0}v_0 + I_0^t \equiv [N_\omega(v)](t), \tag{4}$$

где I_0^t понимается как предел в S_{q_0} интеграла I_h^t при $h \to 0$.

Действительно, из определения решения задачи (1)–(3) вытекает, что при любом $h \in (0,T)$ справедливо соотношение $\psi[v(t),t,\omega t] \in C([h,T],Sq_0)$. Отсюда согласно [13, лемма 23.1] следует равенство

$$v(t) = e^{-(t-h)A_0}v(h) + I_h^t, \quad t > h. \tag{5}$$

Далее, в силу неравенства Гёльдера существует постоянная $c > 0$, при которой для всех $k \leqslant m$ и $v \in C([0,T],S_{p_0})$ выполнены оценки

$$||a_{jkl}(v(t),\cdot,t)||_{C([0,T],S_{p_0/k})} \leqslant c\|v\|^k_{C([0,T],S_{p_0})},$$

$$\|b_{kl}(v(t),\cdot,t)\|_{C([0,T],S_{p_0/k})} \leqslant c\|v\|^k_{C([0,T],S_{p_0})}.$$

Из этих оценок и оценок (9), (10) работы [1], следует существование такой константы $c_1 > 0$, что при всех $t \in [0,T]$ и $h_1, h_2 \in (0,t)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\left\|\int_{h_1}^{h_2} e^{-(t-\tau)A_0}\psi[v(\tau),\tau,\omega\tau]\,d\tau\right\|_{S_{q_0}} \\ &\leqslant c_1\int_{h_1}^{h_2}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}\frac{(m-1)}{q_0}-\frac{1}{2}}\,d\tau\,\left(\|v\|^m_{C([0,T],S_{q_0})}+1\right) \\ &= c_1\left[(t-h_1)^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{(m-1)}{q_0}} - (t-h_2)^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{(m-1)}{p_0}}\right]\left(\|v\|^m_{C([0,T],S_{q_0})}+1\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая определение решения задачи (1)–(3), сильную непрерывность полугруппы e^{-tA} и неравенство (9) из [1], в (5) можно перейти к пределу при $h \to 0$ по норме S_{q_0}, так что равенство (4) обосновано.

В пространстве $C([0,T],S_{q_0})$ рассмотрим оператор N_ω, который определен на вектор-функциях $v(t) \in C([0,T],S_{q_0} \cap W^1_{q_0})$ и действует по правилу, предписанному правой частью равенства (4). Тот факт, что образ N_ω лежит в пространстве $C([0,T],S_{q_0})$ вытекает из [13, лемма 23.1] и рассуждений данной статьи, использовавшихся при обосновании формулы (4). С помощью оценок (9), (10) из [1] и неравенства Гёльдера устанавливается, что оператор N_ω непрерывен не только относительно аргумента $v \in C([0,T],S_{q_0})$, но и относительно параметров $\overset{s}{a}_{jk\ell} \in C([0,T], L_\infty)$, в связи с чем будем рассматривать его на всем пространстве $C([0,T], S_{q_0})$ в условиях п. 1°.

Определение. *Обобщенным решением* задачи (1)–(3) на участке $t \in [0,T]$ называется трехмерная вещественная вектор-функция $v(t) = v(\cdot,t) \in C([0,T], S_{q_0})$, удовлетворяющая равенству $v - N_\omega(v) = 0$.

Предложение 1. *Существует такое положительное число $T_0 \leqslant T$, что задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение $u(x,t) \in C([0,T_0], S_{q_0})$.*

$\lhd$ Не нарушая общности, будем считать $m \geqslant 2$. Обозначим через U_0 шар пространства S_{q_0} с центром v_0 единичного радиуса. Пусть положительные числа M_0, M_1, L_0 и L_1 удовлетворяют при любых $w, \overset{1}{w}, \overset{2}{w} \in U_0$ следующим условиям:

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \big\|\Pi\big[a_j(w,\cdot,\cdot) - w_j w\big]\big\|_{C\left([0,T],\, S_{q_0/m}\right)} \leqslant M_1,$$

$$\|\Pi b_0(w,\cdot,\cdot)\|_{C\left([0,T], S_{q_0/m}\right)} \leqslant M_2,$$

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \left\|\Pi\left[a_j(\overset{2}{w},\cdot,\cdot) - \overset{2}{w}_j w_j - \hat{a}_j(\overset{1}{w},\cdot,\cdot) + \overset{1}{w}_j\overset{1}{w}\right]\right\|_{C\left([0,T], S_{q_0/m}\right)}$$
$$\leqslant L_1\left(\big\|\overset{2}{w} - \overset{1}{w}\big\|_{S_{q_0}} + \max_{j,\ell,s}\Big|\,\overset{s}{a}_{j\ell} - \overset{s}{\hat{a}}_{j\ell}\Big|_{C([0,T],\, L_\infty)}\right),$$

$$\left\|\Pi\left[b_0(\overset{2}{w},\cdot,\cdot) - b_0(\overset{1}{w},\cdot,\cdot)\right]\right\|_{C\left([0,T], S_{p_0/m}\right)} \leqslant L_2\left(\big\|\overset{2}{w} - \overset{1}{w}\big\|_{S_{p_0}}\right).$$

Здесь вектор $\hat{a}_j(w,\cdot,\cdot)$ получен из $a_j(w,\cdot,\cdot)$ заменой функций $\overset{s}{a}_{j\ell}(x,t)$ на $\overset{s}{\hat{a}}_{j\ell}(x,t) \in C\big([0,T], L_\infty\big)$. Выберем теперь $T_0 \in (0,T]$ столь малым, чтобы выполнялись неравенства

$$\big\|\big(e^{-tA_0} - I\big)v_0\big\|_{C\left([0,T_0], S_{p_0}\right)} < \frac{1}{2}$$

$$c\bigg(\frac{M_1 T_0^{1-\beta_1}}{1-\beta_1} + \frac{M_2 T_0^{1-\beta_2}}{1-\beta_2}\bigg) < \frac{1}{2}\,,$$

$$c\bigg(\frac{L_1 T_0^{1-\beta_1}}{1-\beta_1} + \frac{L_2 T_0^{1-\beta_2}}{1-\beta_2}\bigg) < \frac{1}{2}\,,$$

где c — та же константа, что в оценках (9), (10) из [1], $\beta_1 = \frac{3(m_2-1)}{q_0} + \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{3(m_1-1)}{2q_0}$. Отметим, что существование T_0, удовлетворяющего первому из этих неравенств, следует из сильной непрерывности полугруппы e^{-tA_0}. Обозначим теперь через V шар пространства $C\big([0,T_0], S_{p_0}\big)$ с центром v_0 единичного радиуса. Напомним, что обобщенным решением задачи (1)–(3) на временном участке $t \in [0,T_0]$ по определению является вектор-функция $v \in C([0,T_0], S_{q_0})$, удовлетворяющая при $t \in [0,T_0]$ интегральному уравнению

$$v(t) = e^{-tA_0}v_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0}\Pi\bigg\{\sum_{1\leqslant j\leqslant 3}\frac{\partial}{\partial x_j}\,a_j(v,\cdot,\tau)$$
$$+\, b_0(v,\cdot,\tau) - (v,\nabla)v\bigg\}d\tau \equiv \big[N(v,a)\big](t). \tag{7}$$

Докажем, что оператор N преобразует шар V в себя и является сжимающим. В силу неравенств, выписанных в предыдущей части доказательства предложения, а также оценок (9) при $k=0$, (10) из [1] при всех $v,\overset{1}{v},\overset{2}{v}\in V$, $a,\overset{1}{a},\overset{2}{a}\in C([0,T],L_\infty)$, $t\in[0,T_0]$, имеем

$$\big\|\big[N(v,a)\big](t)-v_0\big\|_{S_{q_0}}\leqslant\big\|(e^{-tA_0}-I)v_0\big\|_{S_{q_0}}+c\int\limits_0^t\big[M_1(t-\tau)^{-\beta_1}+M_2(t-\tau)^{-\beta_2}\big]d\tau\leqslant 1,\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\big\|N\big(\overset{2}{v},a\big)-N\big(\overset{1}{v},\overset{1}{a}\big)\big\|_{S_{q_0}}&\leqslant c\Bigg[\int\limits_0^t(t-\tau)^{-\beta_1}\Big(L_1\big\|\overset{1}{v}-\overset{2}{v}\big\|_{S_{q_0}}\\&+\big\|\overset{1}{a}-\overset{2}{a}\big\|_{L_\infty}\big\|\overset{2}{v}\big\|^m_{S_{q_0}}\Big)\,d\tau+\int\limits_0^tL_2(t-\tau)^{-\beta_2}\big\|\overset{2}{v}-\overset{1}{v}\big\|_{S_{q_0/m}}d\tau\Bigg]\qquad(9)\\&\leqslant\frac{cL_1}{1-\beta_1}\,T_0^{1-\beta_1}\Big[\big\|\overset{2}{v}-\overset{1}{v}\big\|_{C([0,T_0],L_{p_0})}+\big\|a-\overset{1}{a}\big\|_{C([0,T_0],L_\infty)}\big\|\overset{2}{v}\big\|^m_{C([0,T_0],S_{q_0})}\Big]\\&+\frac{cL_2}{1-\beta}\,T_0^{1-\beta_2}\big\|\overset{2}{v}-\overset{1}{v}\big\|_{C([0,T_0],S_{p_0})}\leqslant\frac12\big\|\overset{2}{v}-\overset{1}{v}\big\|_{C([0,T_0],S_{q_0})}+c_1\big\|\overset{2}{a}-\overset{1}{a}\big\|_{C([0,T_0],L_\infty)}.\end{aligned}$$

Если v, a столь гладки, что выражение, заключенное в фигурной скобке в (7), принадлежит $C([0,T_0],S_{q_0})$, то $N(u,a)\in C([0,T_0],S_{q_0})$ (см., например, [13, лемма 2.3]). Продолжая $v\in C([0,T],S_{q_0})$, $a\in C([0,T],L_\infty)$ нулем за боковую границу цилиндра Q и аппроксимируя эти продолжения гладкими по x средними по Соболеву в силу оценки (9) заключаем, что при $v\in V$, $N(u,a)\in C([0,T_0],S_{q_0})$. Теперь из оценок (8), (9) следует, что $N(v,a)$ в шаре V является сжатием, а потому задача (1)–(3) имеет в этом шаре обобщенное решение.

Единственность обобщенного решения доказывается аналогично. Конкретнее, если $\overset{i}{v}(t)$, $i=1,2$, — два различных решения, то найдутся $t_1,t_2\in[0,T_0)$, $t_1<t_2$, такие, что $\overset{1}{v}(t_1)=\overset{2}{v}(t_1)\equiv v_1$, $\overset{1}{v}(t)\neq\overset{2}{v}(t)$, $t\in(t_1,t_2)$, $\|\overset{i}{v}(t)-v_1\|_{S_{q_0}}\leqslant 1$, $t\in[t_1,t_2]$. Рассматривая теперь уравнение (7) с заменой v_0 на v_1 на участке $t\in[t_1,t_2]$ и повторяя проведенные рассуждения, найдем такое $T_1\in(t_1,t_2]$, что определенный правой частью этого уравнения оператор (см. N) в шаре $V_1=\{v:\|v\|_{C([t_1,T_1],S_{q_0})}\leqslant 1\}$ является сжатием. Отсюда на основании принципа сжатых отображений приходим к противоречию с неединственностью решений. Предложение 1 полностью доказано. $\rhd$

4°. В этом пункте сформулируем и докажем лемму 1 работы [1] (см. введение). Доказательство следует пути, указанному в [2], и базируется на результатах и методах работ [2, 3, 14].

Лемма 2. *Для любых чисел $\mu\in(0,1]$ и $q>3$ найдется число $\gamma=\gamma(q,\mu)\in(0,1)$, при котором сужение проектора Π на пространство вектор-функций $C^\mu(\overline{\Omega})$ является ограниченным оператором из $C^\mu(\overline{\Omega})$ в $\overset{\circ}{S}{}^{2\gamma}_q$.*

Непосредственному доказательству леммы предпошлем определения моментной и аппроксимационной шкал, а также формулировку интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко (см. [2, 3]).

Пусть B_0, B, B_1 — тройка банаховых пространств, причем имеют место непрерывные вложения $B_1\subset B_0$, $B\subset B_0$, пусть $\gamma_0>0$, $\gamma_1>0$, $\gamma_0+\gamma_1=1$.

Пространство B аппроксимационно разделяет пространства B_0 и B_1 в отношении $\gamma_0:\gamma_1$, если для каждого $x\in B$ существует вектор-функция $x(\lambda)$, $\lambda\in[1,\infty)$, удовлетворяющая условиям:

а) $x(\lambda) \in B_1$;

б) $\|x - x(\lambda)\|_{B_0} \leqslant c\lambda^{-\gamma_0}\|x\|_B$;

в) $\|x(\lambda)\|_{B_1} \leqslant c\lambda^{\gamma_1}\|x\|_B$, где C — не зависящая от x постоянная.

Пространство B моментно разделяет B_0 и B_1 в отношении $\gamma_0 : \gamma_1$, если $B_1 \subset B_0$ и для каждого $x \in B_1$ выполняется оценка

$$\|x\|_B \leqslant c\|x\|_{B_0}^{\gamma_1}\|x\|_{B_1}^{\gamma_0}$$

с независящей от x постоянной c.

Теорема (Интерполяционная теорема И. Б. Симоненко)**.** *Пусть B_0, B, B_1, B_0', B', B_1' — банаховы пространства, причем B аппроксимационно разделяет B_0 и B_1 в отношении γ, B' моментно разделяет B_0' и B_1' в отношении γ', причем $\gamma > \gamma'$. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(B_0, B_0')$ и сужение $A|_{B_1} \in \mathrm{Hom}(B_1, B_1')$. Тогда $A|_B \in \mathrm{Hom}(B, B')$.*

Обозначим через $\widehat{W}_q^1$, $q > 3$, подпространство пространства $W_q^1(\Omega)$ трехмерных вектор-функций, определенных на Ω, соленоидальных и имеющих на S равную нулю нормальную компоненту:

$$\hat{W}_q^1 = \Big\{u \in W_q^1(\Omega) : \operatorname{div} u = 0,\, u_n|_s = 0\Big\}.$$

Предложение 2. *Пространство $\hat{W}_q^1$ аппроксимационно разделяет пространства S_q и $\overset{\circ}{S}{}_q^2$.*

$\lhd$ Отметим вначале, что имеют место вложения $\overset{\circ}{S}{}_q^2 \subset S_q$ и $\hat{W}_q^1 \subset S_q$. Первое из них очевидно, второе следует из [3, леммы 5.2]. Докажем теперь, что для тройки пространств S_q, $\hat{W}_q^1, \overset{\circ}{S}{}_q^2$ выполнены, сформулированные в начале настоящего пункта, условия а)–в).

Пусть $u \in \hat{W}_q^1$. Тогда в силу леммы 6.2 монографии [12] существует векторное поле v_0 на Ω такое, что

$$\operatorname{div} v_0 = 0, \quad \operatorname{rot} v_0 = u, \quad v_{0n}|_S = 0,$$

и выполнена оценка

$$\|v_0\|_{W_q^2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W_q^1(\Omega)}, \tag{10}$$

где c не зависит от u.

Возьмем теперь произвольный кусок S_1 поверхности S, ограниченный контуром l. По формуле Стокса

$$\int\limits_l v_0\, dl = \int\limits_{S_1} \operatorname{rot}_n v_0\, ds = \int\limits_{S_1} u_n\, ds = 0,$$

где $\operatorname{rot}_n v_0$ — нормальная составляющая вектора $\operatorname{rot} v_0$. Отсюда следует, что на поверхности S существует функция $\varphi(s) \in C^1(S)$ (s — локальные координаты поверхности) такая, что

$$\nabla_s \varphi = v_0.$$

Обозначим через $\rho(x)$ расстояние точки $x \in \Omega$ до S, а через Ω_{h_0}, $h_0 > 0$, — погранслой шириной h_0 : $\Omega_{h_0} = \{x \in \Omega : \rho(x) < h_0\}$. Число h_0 будем считать столь малым, что нормали к S в Ω_{h_0} не пересекаются. Пусть $\psi(\tau)$ — бесконечно дифференцируемая при $\tau \in [0, \infty)$ функция такая, что $0 \leqslant \psi(\tau) \leqslant 1$ и

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \tau \geqslant 1. \end{cases}$$

В погранслое Ω_{h_0} введем криволинейные координаты (s,ρ), где $s(x)=(s_1,s_2)$ — точка поверхности S, лежащая с x на одной нормали, $\rho(x)$ — расстояние от x до s. Определим функцию

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi[s(x)]\psi[\rho(x)/h_0], & x\in\Omega_{h_0},\\ 0, & x\in\Omega\backslash\Omega_{h_0}.\end{cases}$$

Легко (например, с помощью теоремы о неявной вектор-функции) показать, что в нашем случае функции $s(x)$ и $\rho(x)$ непрерывно дифференцируемы, поэтому $\Phi\in C^1(\overline{\Omega})$.

Покажем теперь, что справедливы соотношения

$$\nabla\Phi(x_0)=\nabla\varphi[s(x_0)]=v_0[s(x_0)], \tag{11}$$

$$|\nabla\Phi(x)-\nabla\Phi(x_0)|\leqslant c|x-x_0|\|v_0\|_{C(\Omega)}, \tag{12}$$

где $x\in\Omega_{h_0}$, $x_0=(s(x),0)\in S$ и C — не зависящая от x и v_0 постоянная. Для доказательства этих соотношений, не умаляя общности, предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ принадлежит S, ось Ox_3 направлена по внутренней нормали к S и точки x, x_0 находятся в малой окрестности O, причем $s_1(x)=x_1$, $s_2(x)=x_2$. Отсюда легко получается представление

$$\begin{gathered}\nabla\Phi(x)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S_1}\nabla s_1+\frac{\partial\varphi}{\partial S_2}\nabla s_2\right)\psi[\rho(x)/h_0]\\ +\varphi[s(x)]\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\nabla\rho(x)=\nabla\varphi[s(x)\psi[\rho(x)/h_0]+\varphi[s(x)]\frac{\partial\psi[\rho(x)]}{\partial\rho}e[s(x)].\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь

$$e[s(x)]=\left(\frac{\partial f[s(x)]}{\partial s_1},\frac{\partial f[s(x)]}{\partial s_2},-1\right)\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right)^2,\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right)^2},$$

и мы, не умаляя общности, предполагаем, что поверхность S в малой окрестности O представлена уравнением $x_3=f(x_1,x_2)$. Из (13) легко вытекают соотношения (11)–(12). Из (10), (12) и известной теоремы вложения С. Л. Соболева следует неравенство

$$\|\nabla\Phi(x)-\nabla\Phi(x_0)\|\leqslant c\rho(x)\|u\|_{W_q^1},$$

где $x\in\Omega_{h_0}$, $x_0=(s(x),0)$. Здесь и ниже c не зависит от x, u. Определим на Ω векторное поле

$$v(x)=v_0(x)-\nabla\Phi(x).$$

Проведем «срезку» и «сглаживание» этого векторного поля, следуя рассуждениям В. И. Юдовича в лемме 5.2 [11].

Пусть функция

$$\eta_h(x)=1-\psi[\rho(x)/h],\quad x\in\Omega.$$

Введем на Ω векторные поля

$$u_h=\eta_h u+\nabla\eta_h\times v,\quad u=\operatorname{rot}v, \tag{14}$$

$$\begin{gathered}u_{h,\delta}=\int\limits_{\Omega}K_\delta(x-y)\,u_h(y)\,dy=\int\limits_{R^3}K_\delta(x-y)\,u_h(y)\,dy\\ =\operatorname{rot}\int\limits_{R^3}K_\delta(x-y)\,\eta_h(y)\,v(y)\,dy,\quad x\in\Omega,\end{gathered} \tag{15}$$

где K_δ — усредняющее по Соболеву ядро радиуса $\delta < h$. Здесь η_h, u и v (а значит и u_h) считаются продолженными с Ω на $\mathbb{R}^3$ непрерывным образом. Для обоснования последнего равенства в (15) заметим, что для v при гладких v_0 и Φ оно очевидно, так как в этом случае согласно (14) $u_h = \mathrm{rot}(\eta_h v)$, для наших же $v \in C(\Omega)$ оно получается отсюда путем замыкания.

Обозначим для краткости u_{h,h^2} через u_h^0. Легко видеть, что для u_h^0 выполняются условия а) и в) ($\lambda = h^{-1}$). Для обоснования соотношения б) воспользуемся неравенством

$$\|u - u_h^0\|_{L_q} \leqslant \|u - u_h\|_{L_q} + \|u_h - u_h^0\|_{L_q}.$$

В силу (10), (12) из [1] и теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место оценка

$$\|v(x)\| \leqslant c\rho(x)\|u\|_{W_q^1}, \quad x \in \Omega_{h_0}. \tag{16}$$

Используя представление (14), неравенство $\|\nabla\eta_h\| < c_1 h^{-1}$, где c_1 не зависит от h, и оценку (16), получим:

$$\|u - u_h\|_{L_q} \leqslant \|1 - \eta_h\|_{L_q}\|u\|_C + \||\nabla\eta_h|v\|_{L_q(\Omega_h)} \leqslant ch^{1/q}\|u\|_{W_q^1}. \tag{17}$$

Далее воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} u_h^0 - u_h = \int\limits_\Omega K_{h^2}(x-y)[\eta_h(y)u(y) - \eta_h(x)u(x)]\,dy \\ + \int\limits_\Omega K_{h^2}(x-y)\nabla\eta_h(y) \times v(y)\,dy - \nabla\eta_h \times v \equiv w_1 + w_2 + w_3. \end{aligned} \tag{18}$$

Легко получаем оценки:

$$\|w_1\|_C \leqslant C\left(\|u\|_C h + \|u\|_{C^\gamma} h^{2\gamma}\right), \tag{19}$$

где $0 < \gamma < 1 - \frac{3}{q}$,

$$\|w_2\|_{L_q} \leqslant \|\nabla\eta_h \times v\|_{L_q(\Omega_{2h})} \leqslant ch^{1/q}\|u\|_{W_q^1}, \tag{20}$$

$$\|w_3\|_{L_q} = \|w_3\|_{L_q(\Omega_h)} \leqslant ch^{1/q}\|u\|_{W_q^1}. \tag{21}$$

Из соотношений (17)–(21) и теоремы вложения С. Л. Соболева следует оценка

$$\|u - u_h^0\|_{L_q} \leqslant ch^\beta\|u\|_{W_q^1},$$

где $\beta = \min(1/q, 2\gamma)$, c — не зависящая от u постоянная.

Итак, свойство б), а с ним и предложение полностью доказаны. $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство леммы 1. Как известно [11, 13], пространство $\overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta}$ моментно разделяет S_q и $\overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta_1}$, где $0 < \delta < \delta_1 \leqslant 1$, в отношении $\frac{\delta}{\delta_1} : \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right)$. Рассмотрим две тройки пространств $S_q, \hat{W}_q^1, \overset{\circ}{J}{}_q^2$ и $S_q, \overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta}, \overset{\circ}{S}{}_q^2$. Из предложения 2, первого предложения настоящего доказательства и интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко следует существование такого числа $\delta_2 \in (0,1)$, что имеет место непрерывное вложение

$$\widehat{W}_q^1 \subset \overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta_2}. \tag{22}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{C}{}^2$ банахово пространство, полученное замыканием финитных в Ω трехмерных вектор-функций по норме C^2. Как известно, при $u \in \overset{\circ}{C}{}^2$, справедливо представление

$$u = \Pi u + \nabla\varphi, \quad \Pi u \cdot n|_S = 0, \quad \operatorname{div} \Pi u = 0,$$

где φ — решение задачи Неймана

$$\triangle\varphi = \operatorname{div} u, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big|_S = 0.$$

Отсюда с помощью известных априорных оценок следует, что $\Pi \in \operatorname{Hom}\big(\overset{\circ}{C}{}^2, \overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta_2}\big)$. Поэтому в силу (22)

$$\Pi \in \operatorname{Hom}\Big(\overset{\circ}{C}{}^2, \overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta_2}\Big). \tag{23}$$

Рассмотрим теперь еще две тройки пространств трехмерных вектор-функций: L_q, C^μ, $\overset{\circ}{C}{}^2$ и S_q, $\overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta}$, $\overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta_2}$, где $0 < \delta < \delta_2$. Нетрудно показать, что C^μ аппроксимационно разделяет L_q и $\overset{\circ}{C}{}^2$. Как отмечалось выше, $\Pi \in \operatorname{Hom}(L_q, S_q)$ (см. [11]). Отсюда, из (23) и интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко следует существование такого $\delta_0 = \delta_0(q, \mu)$, что $\Pi|_{C^\mu} \in \operatorname{Hom}\big(C^\mu, \overset{\circ}{S}{}_q^{2\delta_0}\big)$. $\triangleright$

Литература

1. *Левенштам В. Б.* О взаимосвязи двух классов решений уравнений Навье — Стокса // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып 3.—С. 56–66.
2. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 2.—С. 236–253.
3. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1989.—112 с.
4. *Левенштам В. Б.* Одно свойство проектора П гидродинамики // Комплексный анализ, дифференциальные и интегральные уравнения.—Эллиста, 1990.—С. 89–96.
5. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 2.—С. 92–109.
6. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2000.—Т. 40, № 9.—С. 1416–1424.
7. *Levenshtam V. B.* Asymptotic integration on initial boundary problem for Navier–Stokes system with a rapidly oscillating mass force // Russian J. of Math. Physics.—2005.—Vol. 12, № 1.—P. 40–48.
8. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование параболических задач с большими высокочастотными слагаемыми // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 4.—С. 805–821.
9. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений, содержащих быстроосцилирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. мат.—2006.—Т. 70, № 2.—С. 25–56.
10. *Левенштам В. Б.* Некоторые вопросы теории усреднения параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Докл. АН.—2006.—Т. 411, № 3.—С. 302–305.
11. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
12. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.—288 с.
13. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
14. *Быховский Э. Б.,Смирнов Н. В.* Об ортогональных разложениях пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по данной области // Тр. МИАН СССР.—1960.—Вып. 59.—С. 6–36.

Статья поступила 18 января 2012 г.

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `vleven@math.rsu.ru`

ON CORRELATION OF TWO SOLUTION CLASSES FOR NAVIER–STOKES EQUATIONS. II

Levenshtam V. B.

This is a supplement to the author's work [1] devoted to the solvability of initial boundary value problem for the Navier–Stokes equations with mass force y depeding on unknown (speed) polynomially. In this paper local resolvability of the problem in the generalized sense is established and the proof of a key lemma in [1] is also given.

Key words: Navier–Stokes equations, local resolvability, a Veyl projection.