Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 2, С. 46–58

УДК **550.348**

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ SH ВОЛН В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Х. Х. Имомназаров, Ш. Х. Имомназаров,
Т. Т. Рахмонов, З. Ш. Янгибоев

Построены регуляризирующие алгоритмы для динамических обратных задач для одномерного уравнения SH волн в насыщенных жидкостью пористых сред, в которых происходит потеря энергии при межкомпонентном трении.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, коэффициент трения.

1. Введение

Многие инженерные проблемы сводятся к решению чисто математических задач. Переход от инженерных задач к чисто математическим нередко представляет большие трудности, поэтому создание математических моделей физических процессов — важнейшее направление современной науки. Широкое распространение в задачах механики жидкости и газа получили краевые задачи, т. е. задачи, в которых либо форма объекта (подземного контура плотины, водонефтяного контакта, контура профиля крыла самолета и т. д.) находится по заданным характеристикам, либо характеристики рассчитываются при заданной его форме. Первые задачи получили название прямых краевых задач, а вторые — обратных [1]. В частности, эти задачи возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Развитие моделей фильтрации в пористых средах, являющихся определяющими в решении геофизических задач, началось во второй половине XIX столетия. В основу научной разработки большинства вопросов фильтрации был положен закон сопротивления при фильтрации жидкости, установленный экспериментальным путем в 1856 г. французским инженером А. Дарси. Закон выражает пропорциональность скорости фильтрации флюида градиенту напора. Коэффициент фильтрации характеризует среду и жидкость одновременно, т. е. зависит от размера частиц, их формы и шероховатости, пористости среды, ее проницаемости, вязкости жидкости. Первые теоретические исследования фильтрации, основанные на этом законе, были начаты Ж. Дюпюи и продолжены Ф. Форхгеймером. Первые двухскоростные математические модели для описания распространения сейсмических волн в насыщенных жидкостью пористых средах были разработаны в работах Я. И. Френкеля, М. Био [2, 3]. Неизотермическая модель фильтрации в предположении аддитивности энтропии компонент пористой среды была получена методом законов сохранения в работе П. Робертса, Д. Лопе [4]. Континуальная теория фильтрации, не ограниченная предположением такого рода, была построена в работах В. Н. Доровского [5, 6] также в рамках метода законов сохранения. Закон Дарси получается в качестве следствия уравнений упомянутых теорий в одном из предельных случаев.

Последние десятилетия внимание математиков направлено на так называемые некорректные задачи, т. е. задачи, у которых решение может не существовать или быть неединственным, неустойчивым. К числу таких задач относятся и многие обратные начально-краевые задачи математической физики. Ряд математических постановок обратных задач теории распространения волн для модели упругих сред впервые был рассмотрен А. С. Алексеевым [7, 8]. Обнаружилась их связь с одномерными обратными спектральными задачами, рассмотренными И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [9], а также М. Г. Крейном [10, 11]. В работе [12] установлена связь метода Баранова — Кюнетца с дискретным аналогом метода Гельфанда — Левитана. При этом условия разрешимости уравнений Гельфанда — Левитана фактически приводили к возможности коррекции неточно заданных сейсмограмм. Достаточно полную библиографию по теории обратных задач для уравнений гиперболического типа можно найти в [13–23].

В данной работе, используя идеи работы [23], строятся регуляризирующие алгоритмы для динамических обратных задач для одномерного уравнения SH волн в насыщенных жидкостью пористых средах, в которых происходит потеря энергии при межкомпонентном трении.

2. Постановка задачи

Пусть полупространство $z > 0$ заполнено неоднородной пористой средой. Уравнения распространения сейсмических SH волн с учетом поглощения энергии, обусловленной коэффициентом межкомпонентного трения $b(z)$, имеют вид [24, 25]

$$\rho_s(z)u_{tt} = (\mu(z)u_z)_z - \rho_l(z)b(z)(u_t - v_t), \tag{1}$$

$$\rho_l(z)v_{tt} = \rho_l(z)b(z)(u_t - v_t). \tag{2}$$

Здесь u и v — компоненты векторов скоростей смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно. Предположим, что пористая среда покоится при $t < 0$:

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Пусть на границе $z = 0$ приложена сила:

$$\mu u_z|_{z=0} = \delta(t). \tag{5}$$

Здесь $\delta(t)$ — функция Дирака.

Требуется по информации (5) и по заданным один раз непрерывно дифференцируемым положительным функциям $\rho_s(z)$, $\mu(z)$, непрерывным положительным функциям $\rho_l(z)$, $b(z)$ определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $u(t,z)$, $v(t,z)$ из (1)–(4). Такую задачу будем называть прямой динамической задачей для уравнений SH волн в пористой среде.

В приложениях наибольший интерес представляют задачи об определении переменных коэффициентов дифференциального уравнения. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения, как правило, описывают физические процессы, а коэффициенты уравнения связаны с физическими характеристиками среды, в которой протекают эти процессы. Так как непосредственно эти коэффициенты измерить невозможно, то задача об определении свойств вещества является, по существу, обратной.

Используя методику предложенную в [23] для обратной задачи теории упругости, построим регуляризирующий алгоритм следующих обратных задач:

Задача 1. Требуется по информации

$$u|_{z=0} = \phi(t) \tag{$*$}$$

восстановить $\mu(z)$ из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\rho_l(z)$, $b(z) = \chi(z)\rho_l(z)$).

Задача 2. Требуется по информации $(*)$ восстановить $\rho_s(z)$ из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции $\chi(z)$, $\rho_l(z)$, $\mu(z)$).

Задача 3. Требуется по информации $(*)$ восстановить $\chi(z)$ из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\rho_l(z)$, $\mu(z)$).

Задача 4. Требуется по информации $(*)$ восстановить $\rho_l(z)$ из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\mu(z)$, $\chi(z)$).

3. Сведение к канонической форме

Введем вместо z координату x:

$$x = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{c_t(\xi)},$$

где $c_t(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}$ есть скорость распространения поперечных сейсмических волн в пористой среде.

После перехода к координате x скорость распространения сейсмических волн в пористой среде становится равной единице. Так как

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c_t}\frac{\partial}{\partial x},$$

то уравнения (1), (2) имеют канонический вид

$$u_{tt} - u_{xx} = (\ln\sigma)' u_x - b(x)\frac{\rho_l(x)}{\rho_s(x)}(u_t - v_t), \quad x > 0, \tag{6}$$

$$v_t = b(x)(u - v), \quad x > 0, \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

$$v|_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{\delta(t)}{\sigma(0)}. \tag{10}$$

В формуле (6) $\sigma(x) = \sqrt{\mu(x)\rho_s(x)}$ — акустическая жесткость, $\sigma > 0$. Далее предположим, что выполнены

$$\begin{gathered} 0 < \rho_{0s} \leqslant \rho_s(x) \leqslant \rho_{00s} < \infty, \quad 0 < \rho_{0l} \leqslant \rho_l(x) \leqslant \rho_{00l} < \infty, \\ 0 < b_0 \leqslant b(x) \leqslant b_{00} < \infty, \end{gathered} \tag{11}$$

где ρ_{0s}, ρ_{0l}, b_0, ρ_{00s}, ρ_{00l}, b_{00} — заданные постоянные.

Теперь обратная задача 1 переформулируется следующим образом: пусть на отрезке $[0,T]$ задана функция

$$u|_{x=0} = \phi(t), \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

и требуется определить $\sigma(x)$, $x \in [0, T/2]$. Обозначим через A оператор решения прямой задачи, $\phi = A \ln \sigma$, $\sigma \in C^1[0,T/2]$, и обозначим через Φ образ пространства $C^1[0,T/2]$ при отображении A.

Следуя работам [7, 8, 21–23], можно показать, что Φ — множество в $C^1[0,T]$, определенное равенством

$$\Phi = \Big\{\phi \in C^1[0,T] : \phi(0) < 0,$$
$$\|\psi\|^2_{L_2(0,T)} + \int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2} \phi'(|t-s|)\psi(t)\psi(s)\,dt\,ds \geqslant 0,\ \forall\,\psi \in L_2(0,T)\Big\},$$

причем оператор A является гомеоморфизмом $C^1[0,T]$ на Φ.

4. Регуляризирующий алгоритм

Пусть вместо функции $\phi = A\ln\sigma$ известно ее приближенное значение $\tilde{\phi} \in C^1[0,T]$, $\|\phi - \tilde{\phi}\| \leqslant \delta$. Если $\tilde{\phi} \in \Phi$, то в силу непрерывности A^{-1} на Φ в качестве приближенного значения σ можно взять $\tilde{\sigma} = \exp[A^{-1}\tilde{\phi}]$. Будем предполагать, что $\tilde{\phi} \in C^1[0,T]$, $\tilde{\phi}(0) < 0$, но, вообще говоря, не принадлежит множеству Φ. Естественный метод нахождения приближения в этом случае состоит в построении отображения $R : \tilde{\Phi} \to C^1[0,T/2]$, $\tilde{\Phi} = \{\phi \in C^1[0,T] : \phi(0) < 0\}$, аппроксимирующего обратный оператор A^{-1} на Φ и определенного на всем множестве $\tilde{\Phi}$ [7, 8, 21–23].

Как показано в [21, 22], исходная обратная задача сводится к нелинейному уравнению типа Вольтерра. В данной работе, следуя [23], предлагается регуляризирующий алгоритм, сохраняющий его «вольтерровость».

Прежде всего покажем, что оператор A действует из $C^1[0,T/2]$ в $C^1[0,T]$, причем $(A\ln\sigma)(0) = -1/\sigma(0) < 0$. Пусть $\sigma \in C^1[0,T/2]$. Будем искать решение задачи (6)–(10) в классе кусочно-гладких функций вида

$$u(x,t) = \theta(t-x)u_\Delta(x,t),$$

$$v(x,t) = \theta(t-x)v_\Delta(x,t).$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда, u_Δ, v_Δ — сужения u, v на замкнутую область $\triangle = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant t\}$, $u_\Delta, v_\Delta \in C^1(\triangle)$.

Тогда из (6)–(10) вытекает, что при любом $T > 0$ сужения u, v на треугольник $\triangle(T) = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant T - x\}$, которые будем обозначать снова через u, v, должны удовлетворять соотношениям

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} = (\ln\sigma)' u_x - b(x)\frac{\rho_l(x)}{\rho_s(x)}(u_t - v_t), \quad 0 < x < t < T - x, \tag{13}$$

$$v_t = b(x)(u - v), \quad 0 < x < t < T - x, \tag{14}$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{15}$$

$$u(x,x) = -\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_0^x \frac{b(y)\rho_l(y)}{2\rho_s(y)}\,dy}, \quad 0 \leqslant x \leqslant T/2, \tag{16}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant T/2. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что задача (13)–(17) эквивалентна уравнениям

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \omega\left(\frac{t+x}{2}\right) + \omega\left(\frac{t-x}{2}\right) - \omega(0) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x (\ln\sigma)'(\xi)\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} U(\xi,\zeta)\,d\zeta \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{(t+x)/2} (\ln\sigma)'(\xi)\,d\xi \int\limits_{\xi}^{t+x-\xi} U(\xi,\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-x)/2} (\ln\sigma)'(\xi)\,d\xi \int\limits_{\xi}^{t-x-\xi} U(\xi,\zeta)\,d\zeta \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^x b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \Big(W(\xi,\zeta) - b(\xi)\int\limits_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-b(\xi)(\zeta-s)}u(\xi,s)\,ds\Big)\,d\zeta \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_0^{(t+x)/2} b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\,d\xi \int\limits_{\xi}^{t+x-\xi} \Big(W(\xi,\zeta) - b(\xi)\int\limits_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-b(\xi)(\zeta-s)}u(\xi,s)\,ds\Big)\,d\zeta \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-x)/2} b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\,d\xi \int\limits_{\xi}^{t-x-\xi} \Big(W(\xi,\zeta) - b(\xi)\int\limits_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-b(\xi)(\zeta-s)}u(\xi,s)\,ds\Big)\,d\zeta, \end{aligned} \tag{18}$$

$$v(x,t) = b(x)\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-b(x)(t-s)}u(x,s)\,ds, \tag{19}$$

где $U = u_x$, $W = u_t$, $\omega(x) = -1/\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}\,\mathrm{e}^{-\int_0^x \frac{b(y)\rho_l(y)}{2\rho_s(y)}dy}$. Дифференцируя (18) по x и t, получаем интегральные уравнения на функции $U(x,t)$, $W(x,t)$, $u(x,t)$, решение которых существует и единственно в $C(\triangle(T))$. Подставляя $U(x,t)$, $W(x,t)$ в (18), найдем решение $u(x,t)$ (из класса C^1) задачи (13), (15), (16). Подставляя $u(x,t)$ в (19), найдем решение $v(x,t)$ задачи Коши (14), (17). Отсюда в частности вытекает, что функция $\phi(t) = u|_{x=0}$ будет из $C^1[0,T]$ и $\phi(0) = -1/\sigma(0) < 0$, т. е. $\phi \in \tilde{\Phi}$.

Покажем теперь, что уравнение $A\ln\sigma = \phi$, $\phi \in \Phi$, эквивалентно уравнению Вольтерра. Для этого введем в рассмотрение банахово пространство Z вектор-функций

$$z(x,t) = \big(z_1(x,t), z_2(x,t), z_3(x), z_4(x)\big),$$

непрерывных на $\triangle(T)$, с естественно определенной операцией умножения на скалярные функции из $C(\triangle(T))$ и нормой

$$\|z\| = \max\big\{\|z_1\|, \|z_2\|, \|z_3\|, \|z_4\|\big\}.$$

В Z выделим подмножество $\tilde{Z}_0$, состоящее из вектор-функций вида

$$\begin{aligned} z_0(x,t) &= (P\phi)(x,t) \\ &\equiv \left\{\frac{1}{2}\phi'(t+x) - \frac{1}{2}\phi'(t-x),\ \frac{1}{2}\phi'(t+x) + \frac{1}{2}\phi'(t-x),\ \phi'(2x),\ 1/\phi(0)\right\}, \quad \phi \in \tilde{\Phi}. \end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, между $\tilde{Z}_0$ и $\tilde{\Phi}$ имеется взаимно однозначное соответствие. Если в (20) $\phi \in \tilde{\Phi}$, то будем писать $z_0 \in \tilde{Z}_0$. Определим оператор $M : Z \times \bar{\mathbb{R}}_+ \to Z$, $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{t : t \geqslant 0\}$, формулами:

$$
\begin{aligned}
(M(z,\alpha))_1(x,t) &= \int\limits_0^x f(z,\alpha)(\xi)\,[z_1(\xi,t+x-\xi)+z_1(\xi,t-x+\xi)]\,d\xi \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_0^x b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\Big\{z_1(\xi,t+x-\xi)+z_1(\xi,t-x+\xi)+z_2(\xi,t+x-\xi) \\
&\quad + z_2(\xi,t-x+\xi) - b(\xi)\int\limits_0^{t+x-\xi} \mathrm{e}^{-b(\xi)(t+x-\xi-s)} Z_2(\xi,s)\,ds \\
&\quad - b(\xi)\int\limits_0^{t-x+\xi} \mathrm{e}^{-b(\xi)(t-x+\xi-s)} Z_2(\xi,s)\,ds\Big\}\,d\xi, \\
(M(z,\alpha))_2(x,t) &= \int\limits_0^x f(z,\alpha)(\xi)\,[z_1(\xi,t+x-\xi)-z_1(\xi,t-x+\xi)]\,d\xi \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_0^x b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\Big\{z_1(\xi,t+x-\xi)-z_1(\xi,t-x+\xi)+z_2(\xi,t+x-\xi) \\
&\quad - z_2(\xi,t-x+\xi) - b(\xi)\int\limits_0^{t+x-\xi} \mathrm{e}^{-b(\xi)(t+x-\xi-s)} Z_2(\xi,s)\,ds \\
&\quad + b(\xi)\int\limits_0^{t-x+\xi} \mathrm{e}^{-b(\xi)(t-x+\xi-s)} Z_2(\xi,s)\,ds\Big\}\,d\xi, \\
(M(z,\alpha))_3(x) &= 2\int\limits_0^x f(z,\alpha)(\xi) z_1(\xi,2x-\xi)\,d\xi + \int\limits_0^x b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\Big\{z_1(\xi,2x-\xi) \\
&\quad + z_2(\xi,2x-\xi) - b(\xi)\int\limits_0^{2x-\xi} \mathrm{e}^{-b(\xi)(2x-\xi-s)} Z_2(\xi,s)\,ds\Big\}\,d\xi, \\
(M(z,\alpha))_4(x) &= -\int\limits_0^x f(z,\alpha)(\xi) z_4(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $f(z,\alpha) = z_3 z_4/(1+\alpha z_3^2)(1+\alpha z_4^2)$.

Лемма 1. *Уравнение $z = z_0 + M(z,0)$, $z_0 \in \tilde{Z}_0$, разрешимо в Z тогда и только тогда, когда $z_0 \in Z_0$.*

$\lhd$ Пусть $z_0 \in \tilde{Z}_0$. По определению множеств Z_0 и Φ это означает, что существует функция

$$\sigma \in C^1[0,T/2], \quad \sigma > 0,$$

такая, что $A \ln \sigma = \phi$, где ϕ однозначно определяется функцией z_0 согласно (20). Далее, по определению $\phi(t) = u|_{x=0}$, $t \in [0,T]$, где $u(x,t)$ — решение задачи (13), (15), (16) с функцией $\sigma = \exp[A^{-1}\phi]$. Покажем, что тогда вектор-функция

$$z(x,t) = \big(u_x(x,t), u_t(x,t), [u(x,x)]', 1/u(x,x)\big)$$

удовлетворяет уравнению $z = z_0 + M(z,0)$. Действительно, обращая волновой оператор $\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2$ по формуле Даламбера с учетом данных Коши $u|_{x=0} = \phi(t)$, $u_x|_{x=0} = 0$ и вытекающего из (16) соотношения

$$f(z,0) + \frac{b\rho_l}{2\rho_s} = \frac{u'}{u} + \frac{b\rho_l}{2\rho_s} = -\frac{1}{2}(\ln\sigma)'$$

находим

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\phi(t+x) + \frac{1}{2}\phi(t-x) + \int\limits_0^x f(z,0)(\xi)\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} z_1(\xi,\zeta)\,d\zeta \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^x b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \Big\{ z_1(\xi,\zeta) + z_2(\xi,\zeta) - b(\xi)\int\limits_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-b(\xi)(\zeta-s)} z_2(\xi,s)\,ds \Big\}\,d\zeta. \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда дифференцирование по x приводит к равенству

$$z_1(x,t) = z_{01}(x,t) + (M(z,0))_1(x,t).$$

Дифференцируя обе части равенства (22) по времени, получим

$$z_2(x,t) = z_{02}(x,t) + (M(z,0))_2(x,t).$$

Затем, полагая в (22) $t = x$, дифференцированием получим

$$z_3(x) = z_{03}(x) + (M(z,0))_3(x).$$

Наконец, по определению $z_4'(x) = -z_3(x)z_4^2(x)$, откуда вытекает, что

$$z_4(x) = z_{04} + (M(z,0))_4(x).$$

Обратно, пусть $z \in \tilde{Z}$ — решение уравнения

$$z = z_0 + M(z,0), \quad z_0 \in \tilde{Z}_0.$$

Тогда функция $z_4(x) \in C^1[0,T/2]$ удовлетворяет соотношению $z_4' + f(z,0)z_4 = 0$, условию $z_4(0) = 1/\phi(0) < 0$ и, следовательно, везде отрицательна. Положим

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(t) + \int\limits_0^x z_1(\xi,t)\,d\xi, \quad (x,t) \in \triangle(T), \\ \sigma(x) &= -z_4^2(x)\,\mathrm{e}^{-\int\limits_0^x b(y)\frac{\rho_l(y)}{\rho_s(y)}\,dy}, \quad x \in [0,T/2], \end{aligned} \tag{23}$$

где ϕ — функция из $\tilde{\Phi}$, соответствующая z_0. Покажем, что пара (u,σ) удовлетворяет равенствам (13), (15), (16). Действительно, по определению $u_x = z_1$, $\sigma'/\sigma = 2z_4'/z_4 =$

$-2f(z,0)$ и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \phi(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial \xi}\Bigg\{\phi(t+\xi) + \phi(t-\xi) - \int\limits_0^{\xi} \frac{\sigma'(\eta)}{\sigma(\eta)}\,d\eta \int\limits_{t-\xi+\eta}^{t+\xi-\eta} u_\eta(\eta,\zeta)\,d\zeta \\
&+ \int\limits_0^{\xi} b(\eta)\frac{\rho_l(\eta)}{\rho_s(\eta)}\,d\eta \int\limits_{t-\xi+\eta}^{t+\xi-\eta} \Big\{u_\zeta(\eta,\zeta) - b(\eta)\int\limits_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-b(\eta)(\zeta-s)} u_s(\eta,s)\,ds\Big\}\,d\zeta\Bigg\}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2}\phi(t+x) + \frac{1}{2}\phi(t-x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)}\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u_\xi(\xi,\zeta)\,d\zeta \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_0^x b(\xi)\,\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \Bigg\{u_\zeta(\xi,\zeta) - b(\xi)\int\limits_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-b(\xi)(\zeta-s)}\,u_s(\xi,s)\,ds\Bigg\}\,d\zeta.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Отсюда видно, что $u \in C^1(\triangle(T))$ и выполняются равенства (13), (15).

Проверим выполнение (16). Полагая в (23) $t = x$ и дифференцируя, находим

$$
\frac{d}{dx}u(x,x) = z_3(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z_4(x)}\right).
$$

В силу того, что $z_4 < 0$, из (23) вытекает равенство

$$
z_4(x) = -\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}\,\mathrm{e}^{\int\limits_0^x \frac{b(y)\rho_l(y)}{2\rho_s(y)}\,dy}.
$$

Тогда

$$
u(x,x) + 1/\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}\,\mathrm{e}^{-\int\limits_0^x \frac{b(y)\rho_l(y)}{2\rho_s(y)}\,dy} = u(0,0) + \frac{1}{\sigma(0)} = \phi(0) - \frac{1}{z_4(0)} = 0.
$$

Итак, пара (u,σ), $u \in C^1(\triangle(T))$, $\sigma \in C^1[0,T/2]$, $\sigma > 0$, удовлетворяет равенствам (13)–(17). По определению множества Φ отсюда вытекает, что функция $\phi(t) = u|_{x=0}$ принадлежит Φ, а следовательно, $z_0 \in \tilde{Z}_0$. $\triangleright$

Таким образом, установлено, что решения уравнений $A\ln\sigma = \phi$, $\phi \in \Phi$, и $z = z_0 + M(z,0)$, $z_0 \in \tilde{Z}_0$, равносильны. Пусть теперь вместо функции $\phi \in \Phi$ задано ее приближенное значение $\tilde{\phi} \in \tilde{\Phi}$, $\|\phi - \tilde{\phi}\| \leqslant \delta$, причем для простоты будем считать, что $\phi(0) = \tilde{\phi}(0)$ (неравенство $\phi(0) \neq \tilde{\phi}(0)$ не вносит принципиальных изменений). В терминах функций $z_0 = P\phi$ и $\tilde{z}_0 = P\tilde{\phi}$ это означает, что $z_0 \in Z_0$, $\tilde{z}_0 \in \tilde{Z}_0$ и $\|z_0 - \tilde{z}_0\| \leqslant \delta$. Если z_0 не принадлежит Z_0, то по лемме 1 уравнение $z = z_0 + M(z,0)$ не имеет решений.

Перейдем к исследованию регуляризованного уравнения $z = z_0 + M(z,\alpha)$, $\alpha > 0$. Пусть B_r — шар в Z радиуса r,

$$
B_r = \{z \in Z : \|z\| \leqslant r\},
$$

$$
\|z\|(x) = \max\left\{\sup_{x\leqslant t\leqslant T-x}|z_1(x,t)|,\ |z_2(x,t)|,\ |z_3(x)|,\ |z_4(x)|\right\}, \quad z \in Z.
$$

Лемма 2. (1) $M \in C^1(Z \times \bar{\mathbb{R}}_+; Z)$, *т. е. оператор* M *непрерывен из* $Z \times \bar{\mathbb{R}}_+$ *в* Z *и имеет непрерывные частные производные* $M_z(z,\alpha)$, $M_\alpha(z,\alpha)$.

(2) *Для любых* $z \in Z$, $\alpha > 0$,

$$\|M(z,\alpha)\|(x) \leqslant \frac{c_1}{2\alpha} \int\limits_0^x \|z\|(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0, T/2], \tag{25}$$

где $c_1(\alpha, T) = \bigl(1 + 2b_{00}\frac{\rho_{00,l}}{\rho_{0,s}}\bigr)(1 + 2Tb_{00})$.

(3) *Для любых* $r > 0$, $\alpha > 0$, $z \in B_r$, $y \in B_r$,

$$\|M(z,\alpha) - M(y,\alpha)\|(x) \leqslant c_2(r,\alpha,T) \int\limits_0^x \|z - y\|(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0, T/2], \tag{26}$$

где $c_2(r,\alpha,T) = \bigl(1 + 4r\sqrt{\alpha} + b_{00}\frac{\rho_{00,l}}{\rho_{0,s}}\alpha\bigr)(1 + 2Tb_{00})/(2\alpha)$.

$\lhd$ Первое утверждение очевидно и проверяется непосредственными вычислениями. Заметим, что оператор $M_z : Z \times \bar{\mathbb{R}}_+ \to L(Z; Z)$ при любых фиксированных z, α является линейным непрерывным оператором Вольтерра. Докажем неравенство (25). Из определения оператора M вытекает, что для любого $\alpha > 0$

$$\|M(z,\alpha)\|(x) \leqslant 2 \int\limits_0^x \left(\bigl|f(z,\alpha)\bigr| + \frac{1}{2}\, b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)} \right) \|z\|(\xi)\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^x b(\xi)\frac{\rho_l(\xi)}{\rho_s(\xi)}(1 + 2Tb(\xi))2\|z\|(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда с учетом (11) и неравенства $|f(z,\alpha)| \leqslant 1/(4\alpha)$ [23] получим неравенство (25). Неравенство (26) доказывается аналогично, если учесть, что функция $f(z,\alpha)$ удовлетворяет неравенству [23]

$$|f(z,\alpha) - f(y,\alpha)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \max\bigl\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\bigr\}. \rhd$$

Рассмотрим теперь регуляризованное уравнение

$$z = z_0 + M(z,\alpha). \tag{27}$$

Теорема 1. *Пусть* $z_0 \in Z$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *в* Z *существует единственное решение* $z(\alpha)$ *уравнения* (27), *более того, как функция параметра* α *оно непрерывно дифференцируемо в* $\mathbb{R}_+$ *и*

$$\|z(\alpha)\| \leqslant \|z_0\| \exp(c_1 T/4\alpha). \tag{28}$$

$\lhd$ Установим сначала априорную оценку (28). Пусть $z(\alpha) \in Z$ — решение, отвечающее значению $\alpha > 0$. Из неравенства (25) следует, что

$$\|z(\alpha)\|(x) \leqslant \|z_0\| + \frac{c_1}{2\alpha} \int\limits_0^x \|z(\alpha)\|(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0, T/2], \tag{29}$$

и оценка (28) получается применением неравенства Гронуолла к (29).

Покажем единственность решения. Пусть $z(\alpha)$, $y(\alpha) \in Z$ — два решение уравнения (27). Поскольку оба решения лежат в шаре $B_{r(\alpha)}$, $r(\alpha) = \|z_0\| \exp(c_1 T/4\alpha)$, то на основании леммы 2 их разность $w(\alpha) = z(\alpha) - y(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$\|w(\alpha)\|(x) \leqslant c_2(r(\alpha), \alpha, T) \int\limits_0^x \|z - y\|(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0, T/2],$$

которое для любых $\alpha > 0$ имеет единственное решение $w(\alpha) = 0$, т. е. $z(\alpha) = y(\alpha)$.

Докажем существование решения методом последовательных приближений. Имеем

$$z^{(n+1)}(\alpha) = z_0 + M\big(z^{(n)}(\alpha), \alpha\big), \quad n \geqslant 0,\ z^{(0)} = z_0. \tag{30}$$

Используя неравенство (25) и принцип индукции, нетрудно показать, что для любого $n \geqslant 0$

$$\big\|z^{(n)}(\alpha)\big\|(x) \leqslant \|z_0\| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big(\frac{c_1 x}{2\alpha}\Big)^k \leqslant \|z_0\| \exp(c_1 T/4\alpha),$$

т. е. все приближения лежат в шаре $B_{r(\alpha)}$.

Рассмотрим последовательность $w^{(n)}(\alpha) = z^{(n+1)}(\alpha) - z^{(n)}(\alpha)$. Имеем

$$\|w^{(0)}(\alpha)\| = \|M(z_0, \alpha)\| \leqslant c_3 \|z_{(0)}\|, \quad c_3 = \frac{c_1 T}{4\alpha},$$

$$\|w^{(n)}(\alpha)\| = \big\|M\big(z^n(\alpha), \alpha\big) - M\big(z^{n-1}(\alpha), \alpha\big)\big\| \leqslant c_2(r(\alpha), \alpha, T) \int\limits_0^x \big\|w^{(n-1)}(\alpha)\big\|(\xi) d\,\xi, \quad n \geqslant 1,$$

и следовательно, для любого $n \geqslant 0$

$$\big\|w^{(n)}(\alpha)\big\| \leqslant c_3 \|z_0\| \frac{1}{n!} \bigg(\frac{c_2 T}{2}\bigg)^n.$$

Отсюда вытекает, что ряд $z_0 + \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)}(\alpha)$ мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\|z_0\| + c_3 \|z_{(0)}\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \bigg(\frac{c_2 T}{2}\bigg)^n = \|z_0\| \big(1 + c_3 \mathrm{e}^{c_2 T/2}\big),$$

и, следовательно, последовательность

$$z^{(n+1)}(\alpha) = z_0 + M\big(z^{(n)}(\alpha), \alpha\big) = z_0 + \sum_{m=0}^{n} w^{(m)}(\alpha)$$

сходится в Z. Поскольку все $z^{(n)}(\alpha) \in B_{r(\alpha)}$, то

$$z(\alpha) = \lim_{n \to \infty} z^{(n)}(\alpha) \in B_{r(\alpha)}.$$

Переходя в (30) к пределу, в силу непрерывности оператора M получаем, что z — решение уравнения (27).

Непрерывная дифференцируемость решения $z(\alpha)$ вытекает из теоремы о неявной функции [26]. Действительно, согласно лемме 2 оператор $G : Z \times \mathbb{R}_+ \to Z$, $G(z, \alpha) = z - z_0 - M(z, \alpha)$, имеет непрерывные производные $G_\alpha = -M_\alpha$, $G_z = I - M_z$. При этом для любых $(z, \alpha) \in Z \times R_+$, $G_z(z, \alpha) : Z \to Z$ имеет ограниченный обратный оператор (в силу того, что $M_z(z, \alpha)$ — линейный непрерывный оператор Вольтерра). Следовательно, по теореме о неявной функции $z(\alpha) \in C^1(\mathbb{R}_+, Z)$. $\rhd$

Рассмотрим случай $z_0 \in Z_0$. Тогда согласно лемме 1 в Z существует единственное решение $z(0)$ уравнения $z = z_0 + M(z, 0)$ (единственность решения следует из единственности исходной обратной задачи [21, 22]). Следовательно, если $z_0 \in Z_0$, то уравнение (27) разрешимо в Z единственным образом для любых $\alpha \geqslant 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае решение $z(\alpha)$ будет непрерывно дифференцируемым на замкнутой полуоси $\bar{\mathbb{R}}_+$. Действительно, по теореме 1 достаточно доказать гладкость $z(\alpha^2)$ в окрестности точки $\alpha = 0$. Последнее вытекает опять из теоремы о неявной функции, поскольку существует решение уравнения $\tilde{G}(z, 0) = 0$, $\tilde{G} \in C^1(Z \times \mathbb{R}, Z)$, где $\tilde{G}(z, \alpha) = G(z, \alpha^2)$, и оператор $\tilde{G}_z(z(0), 0)$ имеет ограниченный обратный. Сформулируем этот результат как следствие из теоремы 1.

Следствие. *Если $z_0 \in Z_0$, то решение уравнения* (27) *существует и единственно в Z для всех $\alpha \geqslant 0$ и принадлежит классу в $C^1(\bar{\mathbb{R}}_+, Z)$.*

Вернемся теперь к исходной задаче. Итак, нам известна функция $\tilde{\phi} \in \tilde{\Phi}$ такая, что $\phi(0) = \tilde{\phi}(0)$, $\|\phi - \tilde{\phi}\| \leqslant \delta$, $\phi \in \Phi$. Следовательно, $z_0 = P\phi \in Z_0$ и $\tilde{z}_0 = P\tilde{\phi} \in \tilde{Z}_0$, $\|z_0 - \tilde{z}_0\| \leqslant \delta$.

Рассмотрим уравнение $z = \tilde{z}_0 + M(z, \alpha)$. По теореме 1 при $\alpha > 0$ оно имеет единственное решение в Z. Обозначим его через $\tilde{z}(\alpha)$. Решение уравнения $z = z_0 + M(z, \alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, обозначим через $z(\alpha)$. Напомним, что $z(0)$ соответствует точному решению обратной задачи. Функция $\tilde{z}(\alpha)$ порождает оператор $R : \tilde{Z}_0 \times \mathbb{R}_+ \to Z$, $R(\tilde{z}_0, \alpha) = \tilde{z}(\alpha)$. Следующая теорема по сути утверждает, что этот оператор является регуляризирующим для уравнения $z = z_0 + M(z, 0)$.

Теорема 2. *Пусть $\delta \leqslant \delta_0$. Тогда существует функция $\alpha(\delta) \in C(0, \delta_0]$, $\alpha > 0$, $\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$, такая, что $\lim_{\delta \to 0} \|\tilde{z}(\alpha(\delta)) - z(0)\| = 0$.*

$\lhd$ В силу неравенства треугольника $\|\tilde{z}(\alpha) - z(0)\| \leqslant \|\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)\| + \|z(\alpha) - z(0)\|$. Пусть $\alpha \leqslant \alpha_0$, где число α_0 будет указано позже. Согласно следствию из теоремы 1, функция $z(\alpha) \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_+, Z)$ и, следовательно, существует константа C_1 такая, что для всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$ $\|z(\alpha) - z(0)\| \leqslant C_1\alpha$. Оценим разность $\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)$:

$$\|\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)\|(x) \leqslant \|\tilde{z}_0 - z_0\| + \|M(\tilde{z}(\alpha), \alpha)) - M(z(\alpha), \alpha))\|(x).$$

Как и при доказательстве (26), нетрудно получить неравенство

$$\|M(\tilde{z}(\alpha), \alpha)) - M(z(\alpha), \alpha))\|(x) \leqslant \left(\frac{c_1}{2\alpha} + \frac{2\|z(\alpha)\|}{\sqrt{\alpha}}\right) \int\limits_0^x \|\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)\|(\xi)\, d\xi.$$

Заметим, что нормы $\|z(\alpha)\|$ равномерно ограничены на $\bar{\mathbb{R}}_+$ некоторой константой l, зависящей от z_0. Это следует из непрерывности функции $z(\alpha)$ на $\bar{\mathbb{R}}_+$ и оценки (28). Таким образом,

$$\|\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)\|(x) \leqslant \delta + \frac{C_2}{\alpha} \int\limits_0^x \|\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)\|(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0, T/2],$$

где $C_2 = (c_1 + 4l\sqrt{\alpha_0})/2$, откуда в силу неравенства Гроноулла получим оценку

$$\|\tilde{z}(\alpha) - z(\alpha)\|(x) \leqslant \delta\, \mathrm{e}^{C_2 T/2\alpha}.$$

В результате приходим к неравенству

$$\|\tilde{z}(\alpha) - z(0)\| \leqslant C_1\alpha + \delta\, \mathrm{e}^{C_2 T/2\alpha}.$$

Теперь достаточно взять
$$\alpha(\delta) = \frac{C_1 + 4l\sqrt{\alpha_0}}{1 + \ln(\delta_0/\delta)} \frac{T}{2},$$
где $\alpha_0 = \left(Tl + \sqrt{T^2 l^2 + C_1 T/2}\right)^2 = \alpha(\delta_0)$. Тогда $\|\tilde{z}(\alpha(\delta)) - z(0)\| \leqslant C_1\alpha(\delta) + \sqrt{\mathrm{e}\delta_0\delta} \to 0$, $\delta \to 0$. $\rhd$

Из доказательства теоремы видно, что оператор R будет равномерно регуляризирующим оператором на любом подмножестве Z_{0l} множества Z_0 вида $Z_{0l} = \{z_0 \in Z_0 : \, l(z_0) < l\}$.

Множество Z_{0l} принято называть множеством корректности рассматриваемой обратной задачи [27].

Замечание. Соответствующие леммы и теоремы имеют место для обратных задач 2, 3 и 4. Для исследования обратных задач 3 и 4 надо взять вектор-функцию $z(x,t)$ в виде
$$z(x,t) = \left(u_x(x,t), u_t(x,t), \left[u(x,x)\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}\,\right]', \frac{1}{u(x,x)\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}}\right).$$

В заключение авторы выражают благодарность Перепечко Ю. В. за обсуждение проблемы и за ряд ценных замечаний, которые были учтены при подготовке статьи.

Литература

1. *Нужин М. Т., Ильинский Н. Б.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации.—Казань: КГУ, 1963.—140 с.
2. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика.—1944.—Т. 8, № 4.—С. 133–150.
3. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // The J. of the Acoustical Society of America.—1956.—Vol. 28, № 2—P. 168–178.
4. *Roberts P. H., Loper D. E.* Dynamical processes in slurries // Structure and Dynamics of Partially Solidified System. NATO ASI. Serie E.—1987.—Vol. 125.—P. 229–290.
5. *Доровский В. Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика.—1989.—№ 7.—С. 39–45.
6. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Феноменологическое описание двухскоростной среды с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ.—1992.—Т. 33, № 3.—С. 403–409.
7. *Алексеев А. С.* Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных.—М: Наука, 1967.—С. 9–84.
8. *Алексеев А. С.* Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика.—1962.—№ 11.—С. 1514–1531.
9. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1951.—Т. 15, № 4.—С. 309–360.
10. *Крейн М. Г.* Решение обратной задачи Штурма — Лиувилля // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 76, № 1.—С. 21–24.
11. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР.—1954.—Т. 94, № 6.—С. 987–990.
12. *Алексеев А. С., Добринский В. И.* Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики // Мат. проблемы геофизики.—Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975.—Вып. 6, ч. 2.—С. 7–53.
13. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.—261 с.
14. *Белишев М. И., Благовещинский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн.—СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999.—268 с.
15. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.—287 с.
16. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.—М.: Наука, 1980.—286 с.
17. *Алексеев А. С., Имомназаров Х. Х., Грачев Е. В, Рахмонов Т. Т., Имомназаров Б. Х.* Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб. жур. индустриальной математики.—2004.—Т. 7, № 1 (17).—С. 3–8.

18. *Imomnazarov Kh. Kh.* Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media // Comp. Appl. Math.—2001.—Vol. 20.—P. 20–34.
19. *Имомназаров Х. Х.* Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. жур. индустриальной математики.—2001.—Т. 4, № 2 (8).—С. 154–165.
20. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи.—Новосибирск: Наука, 1983.—207 с.
21. *Имомназаров Х. Х., Холмуродов А. Э.* Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Вестн. НУУЗ. Сер. Механика и математика.—2006.—№ 2.—С. 86–91.
22. *Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A. E.* Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Math. and Computer Modelling.—2007.—Vol. 45, № 3–4.—P. 270–280.
23. *Пестов Л. Н.* Об одном способе регуляризации одномерной задачи теории упругости // Тр. ВЦ СО РАН. Мат. моделирование в геофизике.—Новосибирск, 1993.—Т. 1.—С. 112–124.
24. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И.* Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформирунмых средах // ФГВ.—1993.—№ 1.—С. 100–111.
25. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum.—New York: Nova Science Publishers Inc., 1995.—192 p.
26. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1968.—496 с.
27. *Бухгейм А. Л.* Разностные методы решения некорректных задач.—Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.—149 с.

Статья поступила 15 марта 2011 г.

Имомназаров Холматжон Худайназарович
Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН,
вед. научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

Имомназаров Шерзад Холматжонович
Новосибирский государственный университет,
магистрант
РОССИЯ, 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2
E-mail: t.rakhmonov@mail.ru

Рахмонов Турдимухаммад Тухтаматович
Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан,
вед. научный сотрудник
УЗБЕКИСТАН, 702132, Ташкент, пос. Улугбек
E-mail: t.rakhmonov@mail.ru

Янгибоев Зойир Шобердиевич
Каршинский государственный университет,
старший преподаватель
УЗБЕКИСТАН, 180103, Карши, ул. Кучабаг, 17
E-mail: zoyiry@mail.ru

REGULARIZATION IN INVERSE DYNAMIC PROBLEMS FOR THE EQUATION OF SH-WAVES IN A POROUS MEDIUM

Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh.,
Rakhmonov T. T., Yangiboyev Z. Sh.

Regularization algorithms for dynamic inverse problems for 1D equation of SH-waves in fluid saturated of porous media with energy dissipation at intercomponent friction have been constructed.

Key words: inverse problem, regularization, friction coefficient.