Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 44–47

УДК **514.17**

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОБЪЕМА НА ТРЕХМЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ С ЗАДАННЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ДИАМЕТРОМ[1]

Н. В. Рассказова

В работе доказывается, что среди всех трехмерных прямоугольных параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром наибольшее значение объема достигается на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$.

Ключевые слова: прямоугольный параллелепипед, геодезический (внутренний) диаметр, объем.

Пусть $P = ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{E}^3$ с ребрами длины $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Обозначим через $\partial(P)$ — поверхность параллелепипеда P (его границу в естественной топологии трехмерного евклидова пространства). Пусть $d(M, N)$ — геодезическое (внутреннее) расстояние между точками $M \in \partial(P)$ и $N \in \partial(P)$, т. е. минимум длин ломаных, лежащих в $\partial(P)$ и соединяющих точки M и N. Через $D(P)$ обозначим геодезический (внутренний, в другой терминологии) диаметр параллелепипеда P (точнее, его поверхности) — максимальное геодезическое (внутреннее) расстояние между парой точек на поверхности параллелепипеда. О свойствах геодезического расстояния на поверхности параллелепипеда можно узнать, например, из работ [1] и [2].

Сопоставим параллелепипеду P следующие интегралы поперечных мер Минковского W_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ [5]: $W_0(P) = V(P)$, $W_1(P) = F(P)/3$, $W_2(P) = M(P)/3$, $W_3(P) = \mathrm{const} = 4\pi/3$, где $V(P) = abc$ — объем, $F(P) = 2(ab + ac + bc)$ — площадь поверхности, $M(P) = \pi(a + b + c)$ — интеграл средней кривизны.

Интересной задачей является нахождение экстремальных значений интегралов поперечных мер Минковского (исключая тривиальный случай константы $W_3 = 4\pi/3$) для прямоугольного параллелепипеда $P = ABCDA'B'C'D'$ с заданным геодезическим диаметром. Для удобства мы будем рассматривать также *вырожденные параллелепипеды*, что соответствует случаю $a = 0$.

Экстремальные значения *площади поверхности* $F(P)$ параллелепипеда P были найдены Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [6], где было доказано, что максимум площади поверхности достигается на параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. В частности, для произвольных параллелепипедов выполняется соотношение $ab + ac + bc \leqslant \frac{1+2\sqrt{2}}{6}\,(D(P))^2$. Минимум в данном случае, очевидно, равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах со свойством $a = b = 0$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8206, а также гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, грант № НШ-921.2012.1.

В [3] были получены экстремальные значения для *интеграла средней кривизны* $M(P)$. В частности, наибольшее значение $M(P)$ достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$, а наименьшее значение — на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполнено неравенство $\pi D(P) \leqslant M(P) \leqslant \pi\sqrt{2}D(P)$.

В настоящей работе мы исследуем экстремальные значения *объема* $V(P)$ параллелепипеда. Очевидно, что минимум равен 0 и достигается в точности на (вырожденных) параллелепипедах при $a = 0$. Случай максимума освещает следующая

Теорема 1. *Среди всех прямоугольных параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром наибольшее значение объема $V(P)$ достигается в точности на параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполнено неравенство*

$$abc \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}}\,D(P)^3, \tag{1}$$

где $D(P)$ — геодезический диаметр параллелепипеда.

Для доказательства данной теоремы приведем некоторые результаты работы [6]. В частности, в [6] Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой была получена явная формула для расчета внутреннего диаметра поверхности произвольного прямоугольного параллелепипеда:

Предложение 1 [6, Теорема 1]**.** *Пусть $D(P)$ — это геодезический диаметр параллелепипеда P со сторонами длины $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Тогда справедливо следующее:*

(I) если $(a,b,c) \in \mathscr{ME}$, то $D(P) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$;

(II) если $(a,b,c) \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{ME}$ и $a^2b^2 \leqslant c^2(b-a)(a+b+2c)$, то

$$D(P) = \sqrt{b^2 + 3c^2 + 2b(a+c) - 2c\sqrt{(b+c)^2 - 2a(c-b) - a^2}};$$

(III) если $(a,b,c) \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{ME}$ и $a^2b^2 \geqslant c^2(b-a)(a+b+2c)$, то $D(P) = l$, где l — единственный действительный корень уравнения

$$\sqrt{l^2 - (a+c)^2} + \sqrt{l^2 - (b+c)^2} + \sqrt{2l^2 - (a+b+c)^2} = c,$$

удовлетворяющий неравенству $l \geqslant \max\{b+c, \sqrt{(a+b)^2 + c^2}\,\}$. Здесь

$$\mathscr{M} = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 < a \leqslant b \leqslant c\big\},$$

$$\mathscr{ME} = \Big\{(a,b,c) \in \mathscr{M} : \, \sqrt{\max\{0, a^2 + 2ab - 2bc\}} + \sqrt{\max\{0, b^2 + 2ab - 2ac\}} \geqslant 2c - a - b\Big\}. \tag{2}$$

Предложение 2 [6, Лемма 2]**.** *Внутреннее расстояние между точками A и C' (т. е. внутреннее расстояние между двумя противолежащими вершинами параллелепипеда P) удовлетворяет равенству $d(A, C') = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.*

Рассмотрим функции d_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ [6], вычисляемые по следующим формулам:

$$d_1(x,y) = \sqrt{(a+c)^2 + (b-2y)^2},$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{(b+c)^2 + (a-2x)^2},$$
$$d_3(x,y) = \sqrt{(c+x+y)^2 + (a+b-x-y)^2},$$
$$d_4(x,y) = \sqrt{(a+b)^2 + (c+2y)^2},$$
$$d_5(x,y) = \sqrt{(a+b)^2 + (c+2x)^2},$$

где $0 \leqslant x \leqslant a/2$, $0 \leqslant y \leqslant b/2$ и функцию $\overline{D}(x,y) : [0,a/2] \times [0,b/2] \to \mathbb{R}$, равную

$$\overline{D}(x,y) = \min\bigl\{d_i(x,y) : 1 \leqslant i \leqslant 5\bigr\}. \tag{3}$$

Предложение 3 [6, Предложение 3]**.** *Внутренний диаметр параллелепипеда P вычисляется по формуле*

$$D(P) = \max\Bigl\{\overline{D}(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a/2,\ 0 \leqslant y \leqslant b/2\Bigr\},$$

где функция $\overline{D}(x,y)$ определяется из равенства (3).

$\lhd$ Для произвольного параллелепипеда P с соотношением длин сторон $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$ получим $D(P) = \sqrt{6}\,a$, т. е. в этом случае $V(P) = abc = \sqrt{2}a^3 = \frac{1}{6\sqrt{3}}D(P)^3$.

Поскольку $\overline{D}(x,y) \leqslant D(P)$ (см. предложение 3), то для доказательства неравенства (1) достаточно отыскать точку $(x,y) \in [0,a/2] \times [0,b/2]$ такую, что

$$abc \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}}\bigl(\overline{D}(x,y)\bigr)^3. \tag{4}$$

Возьмем точку $(x,y) = (0,0)$. Согласно предложению 2, геодезическое расстояние между двумя противолежащими вершинами параллелепипеда определяется формулой $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$, что эквивалентно равенству $\overline{D}(0,0) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.

Используя подобие, мы без ограничения общности полагаем $c=1$. Тогда $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ и неравенство (4) примет вид

$$ab \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}}\bigl((a+b)^2 + 1)\bigr)^{\frac{3}{2}}, \tag{5}$$

или

$$108a^2b^2 \leqslant \bigl((a+b)^2 + 1\bigr)^3. \tag{6}$$

Используя очевидное неравенство $4ab \leqslant (a+b)^2$ (равенство здесь лишь при равных $a = b$), достаточно доказать, что

$$27t^2 \leqslant 4(t+1)^3,$$

где $0 \leqslant t = (a+b)^2 \leqslant 4$. Последнее неравенство можно представить в виде

$$(4t+1)(t-2)^2 \geqslant 0,$$

при этом равенство возможно лишь при $t = (a+b)^2 = 2$, а именно при $a = b = 1/\sqrt{2}$. Тем самым мы показали справедливость неравенства (1) для произвольного прямоугольного параллелепипеда, причем равенство выполняется только при $a = b = 1/\sqrt{2}$, т. е. для параллелепипедов с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. $\rhd$

Литература

1. *Вялый М. Н.* Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда // Математическое просвещение, сер. 3.—М.: Изд-во МЦНМО, 2005.—Т. 9.—С. 203–206.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутреннем расстоянии на поверхности параллелепипеда // Тр. Рубцовского индустр. ин-та.—2000.—Т. 9.—С. 222–228.
3. *Рассказова Н. В.* Экстремальные значения интеграла средней кривизны на множестве параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром // Владикавказ. мат. журн.—Т. 15, вып. 2.—С. 78–82.
4. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.
5. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.
6. Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V. The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete and Computational Geometry.—2008.—Vol. 40.—P. 504–527.

Статья поступила 18 октября 2012 г.

Рассказова Наталья Владимировна
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО Алтайский государственный технический университет
им. И. И. Ползунова,
старший преподаватель кафедры прикладная математика
РОССИЯ, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6
E-mail: ras_na@mail.ru

EXTREMAL VALUES OF THE VOLUME OF 3-DIMENSIONAL PARALLELEPIPEDS WITH A GIVEN INTRINSIC DIAMETER

Rasskazova N. V.

It is proved that a parallelepiped with relation $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$ for its edge lengths has maximal volume among all rectangular parallelepipeds with a given intrinsic diameter.

Key words: rectangular parallelepiped, geodesic (intrinsic) diameter, volume.