Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 3–11

УДК **517.968**

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ИХ НАХОЖДЕНИЯ

А. В. Васильев, В. Б. Васильев

В работе получена оценка разности между континуальным и дискретным сингулярными интегралами в многомерном пространстве. Предлагается использование быстрого преобразования Фурье для нахождения приближенного решения уравнений, содержащих такие операторы.

Ключевые слова: ядро Кальдерона — Зигмунда, символ, дискретный сингулярный интегральный оператор, приближенное решение, быстрое преобразование Фурье.

1. Введение

Под многомерным сингулярным интегральным уравнением в пространстве $\mathbb{R}^n$ понимается уравнение вида

$$a(x)u(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x, x-y)u(y)\,dy = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $K(x,y)$ — это так называемое *ядро Кальдерона — Зигмунда* [8, 11] и интеграл в (1) понимается в смысле главного значения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x, x-y)u(y)\,dy = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon<|x-y|<N} K(x,x-y)u(y)\,dy.$$

Определение 1. Функция $K(x,y)$, определенная на $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, называется *ядром Кальдерона — Зигмунда*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $K(x,tx) = t^{-m}K(x,y)$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, t > 0)$;

2) $\int_{S^{m-1}} K(x,\omega)\,d\omega = 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^m)$;

3) $|K(x,y)| \leqslant C$, $K(x,\omega)$ дифференцируема на S^{m-1} $(\forall\, x \in \mathbb{R}^m)$, S^{m-1} — единичная сфера в m-мерном пространстве, C — постоянная.

Вопросы разрешимости (нётеровости) уравнений типа (1) исследовались в работах многих авторов в различных функциональных пространствах. Уравнения типа (1) (например, в случае замены $\mathbb{R}^m$ ограниченной областью или поверхностью в пространстве) часто встречаются в различных задачах математической физики [13, 14], и вопросы нахождения их решения имеют первостепенное значение. Однако теоретические исследования, основанные, как правило, на локальном принципе [10], приводят лишь к условиям

© 2014 Васильев А. В., Васильев В. Б.

нётеровости и вычислению индекса оператора. Поэтому в данной работе мы для простейших типов уравнений (1) попытаемся обосновать схему дискретизации уравнений и нахождения приближенного решения, дать оценку погрешности дискретного решения и показать, что к таким уравнениям можно успешно применить быстрое преобразование Фурье.

Мы рассматриваем уравнение (1) в случае, когда ядро $K(x,y)$ не зависит от полюса x, т. е. имеет вид

$$au(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x-y)u(y)\,dy = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Казалось бы, уравнение (2) решается просто применением преобразования Фурье, но это только теоретически. С компьютерной точки зрения нужны дискретные (и к тому же конечные) наборы точек, имитирующие (моделирующие) уравнение (2). В связи с этим мы сначала предлагаем заменить уравнение (2) дискретной системой, а затем уже рассматривать ее возможные конечные аппроксимации. Некоторые предварительные соображения, связанные с этим, были описаны в работах авторов [4–7].

2. Дискретный сингулярный интегральный оператор

Для многомерного сингулярного интегрального оператора

$$(Ku)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x-y)u(y)\,dy$$

мы предлагаем рассмотреть следующий дискретный аналог:

$$(K_d u_d)(x) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}_h^m} K_d(\tilde{x}-\tilde{y})\,[u_d(\tilde{y}) - u_d(\tilde{x})]\,h^m, \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}_h^m, \tag{3}$$

где мы будем придерживаться следующих обозначений.

В m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ определим целочисленную решетку $(\operatorname{mod} h)\mathbb{Z}_h^m$. Полагаем $K(0) = 0$ и обозначаем K_d сужение ядра $K(x)$ на $\mathbb{Z}_h^m$, u_d — функция дискретного аргумента, определенная на решетке $\mathbb{Z}_h^m$ и, наконец, сумма ряда (3) понимается как предел частичных сумм

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}_h^m \cap Q_N} K_d(\tilde{x}-\tilde{y})\,[u_d(\tilde{y}) - u_d(\tilde{x})]\,h^m,$$

где

$$Q_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k| \leqslant N \right\}.$$

Символом ℓ_h^2 мы будем обозначать гильбертово пространство функций дискретного аргумента $L_2(\mathbb{Z}_h^m)$ со скалярным произведением

$$(u_d, v_d) = \sum_{\tilde{\tau}\in\mathbb{Z}_h^m} u_d(\tilde{x})\overline{v_d(\tilde{x})}$$

и соответствующей нормой

$$\|u_d\|_{\ell_h^2} = \left(\sum_{\tilde{\tau}\in\mathbb{Z}_h^m} |u_d(\tilde{x})|^2 h^m \right)^{1/2}.$$

Хорошо известно, что при сформулированных условиях на ядро оператор K ограниченно действует в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ [8, 11]. С учетом этого нетрудно установить, что справедлива

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\|K_d u_d\|_{\ell_h^2} \leqslant c\|u_d\|_{\ell_h^2},$$

где постоянная c не зависит от h.

Таким образом, семейство дискретных операторов (3) равномерно ограничено по h.

3. Символы операторов и обратимость

Определение 2. *Символом* оператора K называется преобразование Фурье ядра $K(x)$ в смысле главного значения

$$\sigma(\xi) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon<|x|<N} K(x)e^{i\xi\cdot x}dx.$$

Если применить преобразование Фурье к уравнению (2), то мы получим уравнение

$$\big(a + \sigma(\xi)\big)\tilde{u}(\xi) = \tilde{v}(\xi),$$

необходимым и достаточным условием разрешимости которого в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ будет [8, 11]

$$\inf|a + \sigma(\xi)| > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Функцию $a + \sigma(\xi)$ мы называем символом оператора $aI + K$, I — единичный оператор.

С дискретным оператором K_d мы тоже свяжем символ $\sigma_d(\xi)$, $\xi \in [-\pi h^{-1}, \pi h^{-1}]^m$, определяемый многомерным рядом Фурье

$$\sigma_d(\xi) = \sum_{\tilde{\tau}\in\mathbb{Z}_h^m} K(\tilde{x})e^{-i\tilde{x}\cdot\xi}h^m,$$

где частичные суммы берутся по дискретным кубам $Q_N \cap \mathbb{Z}_h^m$, и которые представляют собой периодическую функцию в $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $[-\pi h^{-1}, \pi h^{-1}]^m$ [12].

Соответственно, символом дискретного сингулярного уравнения

$$(aI + K_d)u_d = v_d, \tag{4}$$

мы называем функцию $a + \sigma_d(\xi)$, $\xi \in [-\pi h^{-1}, \pi h^{-1}]^m$.

В работе [17] был приведен замечательный факт, утверждающий, что множества значений символа $\sigma(\xi)$ и $\sigma_d(\xi)$ совпадают, откуда немедленно вытекало, что уравнение (2) и его дискретный аналог (4) разрешимы или неразрешимы одновременно. Таким образом, если мы имеем решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (4), естественно ожидать, что при малых $h > 0$ оно будет близко к решению исходного уравнения (2).

4. Оценка близости операторов K и K_d

Обозначим через P_h оператор сужения на решетку $\mathbb{Z}_h^m$, т. е. оператор, сопоставляющий каждой функции, определенной на $\mathbb{R}^m$, набор ее дискретных значений в узлах решетки $\mathbb{Z}_h^m$. Следуя [18], дадим следующее

Определение 3. *Мерой аппроксимации* операторов K и K_d в линейном нормированном пространстве X функций, определенных на $\mathbb{R}^m$, называется операторная норма

$$\|P_h K - K_d P_h\|_{X_d},$$

где X_d — нормированное пространство функций, определенных на решетке $\mathbb{Z}_h^m$ с нормой, индуцированной нормой пространства X.

В качестве пространства X_d наряду с пространством ℓ_h^2 мы будем использовать пространство C_h, которое представляет собой пространство функций u_d дискретного аргумента $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_h^m$ с нормой

$$||u_d||_{C_h} = \max_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}_h^m} |u_d(\tilde{x})|.$$

Другими словами, пространство C_h — это пространство сужений функций $u \in C(\mathbb{R}^m)$ на узлы решетки $\mathbb{Z}_h^m$. Здесь стоит заметить, что оператор K не ограничен в пространстве $C(\mathbb{R}^m)$, однако он ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$, и хорошо известно, что если правая часть уравнения (2) обладает какой-то гладкостью (например, удовлетворяет условию Гёльдера), то решение уравнения (2) (если оно существует в $L_2(\mathbb{R}^m)$) обладает той же гладкостью [8].

Определим дискретное пространство $C_h(\alpha, \beta)$ как пространство функций дискретного аргумента $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_h^m$ с конечной нормой

$$\|u_d\|_{C_h(\alpha,\beta)} = \|u_d\|_{C_h} + \sup_{\tilde{x},\tilde{y} \in \mathbf{Z}_h^m} \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|^\alpha}{(\max\{1 + |\tilde{x}|,\, 1 + |\tilde{y}|\})^\beta},$$

удовлетворяющих условиям

$$|u_d(\tilde{x})| \leqslant \frac{c}{(1 + |\tilde{x}|)^{\beta - \alpha}},$$

$$|u_d(\tilde{x}) - u_d(\tilde{y})| \leqslant c\, \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|^\alpha}{(\max\{1 + |\tilde{x}|,\, 1 + |\tilde{y}|\})^\beta}, \quad (\forall\, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m,\ \alpha, \beta > 0,\ 0 < \alpha < 1).$$

Континуальным аналогом этих пространств служит пространство $H_\beta^\alpha(\mathbb{R}^m)$ функций, непрерывных на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условиям Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$ и с весом $(1 + |x|)^\beta$ (см. [1]). Из результатов [1], в частности вытекает, что оператор K является линейным ограниченным оператором $K : H_\beta^\alpha(\mathbb{R}^m) \to H_\beta^\alpha(\mathbb{R}^m)$ при условии $m < \beta < \alpha + m$.

Для пространств $C_h(\alpha, \beta)$ имеет место

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\|K_d u_d\|_{C_h(\alpha,\beta)} \leqslant c\|u_d\|_{C_h(\alpha,\beta)},$$

$m < \beta < \alpha + m$, *где постоянная* c *не зависит от* h.

Мы дадим оценку меры аппроксимации операторов K и K_d в пространстве $C_h(\alpha, \beta)$. Это позволит дать оценку погрешности решения при замене континуального оператора K его дискретным аналогом K_d.

Теорема 3. *Для меры аппроксимации операторов K и K_d справедлива оценка*

$$\|P_h K - K_d P_h\|_{C_h(\alpha,\beta)} \leqslant ch^{\tilde{\alpha}},$$

где постоянная c не зависит от h, $\tilde{\alpha} < \alpha$, $\tilde{\beta} > \beta$.

$\lhd$ Требуется доказать справедливость следующих двух оценок:

$$|((P_h K - K_d P_h)u)\,(\tilde{x})| \leqslant c_1 h^{\tilde{\alpha}}, \tag{5}$$

$$|[(P_h K - K_d P_h)u]\,(\tilde{x}) - [(P_h K - K_d P_h)u]\,(\tilde{y})| \leqslant c_2 h^{\tilde{\alpha}} \sup_{\tilde{x},\tilde{y}\in\mathbb{Z}_h^m} \frac{|\tilde{x}-\tilde{y}|^{\alpha}}{(\max\{1+|\tilde{x},\, 1+|\tilde{y}|\})^{\tilde{\beta}}} \tag{6}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Начнем с оценки (5):

$$\begin{aligned}
&((P_h K - K_d P_h)u)\,(\tilde{x})\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(\tilde{x}-y)[u(y)-u(\tilde{x})]\,dy - \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}_h^m} K(\tilde{x}-\tilde{y})[u(\tilde{y})-u(\tilde{x})]h^m\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus Q_N} K(\tilde{x}-y)[u(y)-u(\tilde{x})]dy - \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}_h^m\setminus Q_N} K(\tilde{x}-\tilde{y})[u(\tilde{y})-u(\tilde{x})]h^m\\
&+ \sum_{\tilde{y}\in Z_h^m\cap Q_N} \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} \Big(K(\tilde{x}-y)[u(y)-u(\tilde{x})] - K(\tilde{x}-\tilde{y})[u(\tilde{y})-u(\tilde{x})]\Big)\,dy\\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

где $Q_h(\tilde{y})$ — куб с центром в $\tilde{y} \in \mathbb{Z}_h^m$ и ребром h.

Первые два слагаемых представляют собой «остатки на бесконечности» континуального и дискретного сингулярного интеграла, и лишь третье слагаемое оценивает близость между сингулярным интегралом и соответствующей кубатурной формулой. Поэтому начнем с I_3.

1) Если $\tilde{x} = \tilde{y}$, то

$$\begin{aligned}
\Bigg|\int\limits_{Q_h(\tilde{y})} K(\tilde{x}-y)[u(y)-u(\tilde{x})]\,dy\Bigg| &\leqslant c \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} \frac{|u(y)-u(\tilde{x})|}{|\tilde{x}-y|^m}\,dy\\
&\leqslant c \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^{m-\alpha}(1+|y|)^{\beta}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

2) Если $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $\tilde{x} \in Q_N$, то обозначив

$$I_{3,n} = \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} \Big(K(\tilde{x}-y)[u(y)-u(\tilde{x})] - K(\tilde{x}-\tilde{y})[u(\tilde{y})-u(\tilde{x})]\Big)\,dy,$$

разобьем его на два

$$\begin{aligned}
I_{3,n} = &\int\limits_{Q_h(\tilde{y})} [K(\tilde{x}-y) - K(\tilde{x}-\tilde{y})]\,[u(y)-u(\tilde{x})]\,dy\\
&+ \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} K(\tilde{x}-\tilde{y})[u(y)-u(\tilde{y})] = I_{3,n}^{(1)} + I_{3,n}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Поскольку $|\tilde{x}-y| \sim |\tilde{x}-\tilde{y}|$, имеем

$$\left|I_{3,n}^{(2)}\right| \leqslant ch^{\alpha} \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^m(1+|y|)^{\beta}}. \tag{8}$$

Для оценки $I_{3,n}^{(1)}$ нам понадобится следующая оценка для ядра Кальдерона — Зигмунда

$$|K(\tilde{x}-y)-K(\tilde{x}-\tilde{y})| \leqslant c\frac{|y-\tilde{y}|}{|\tilde{x}-y|^{m+1}},$$

которая легко получается с помощью элементарных выкладок.

С учетом этого

$$\left|I_{3,n}^{(1)}\right| \leqslant ch \int\limits_{Q_h(\tilde{y})} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^{m+1-\alpha}(1+|y|)^{\beta}}. \tag{9}$$

Остается собрать вместе оценки (7)–(9), просуммировав по кубам $Q_h(\tilde{y}) \subset Q_N$. Отметим, что оценка (7) в единственном числе.

Разбив $\mathbb{R}^m$ на два множества

$$A = \left\{y \in \mathbb{R}^m: \ |\tilde{x}-y| \geqslant \frac{1+|\tilde{x}|}{2}\right\}$$

и

$$B = \left\{y \in \mathbb{R}^m: \ |\tilde{x}-y| < \frac{1+|\tilde{x}|}{2}\right\},$$

имеем для

$$R_N = \int\limits_{Q_N} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^m(1+|y|)^{\beta}}$$

следующую оценку (напомним, $|\tilde{x}-y| \geqslant h/2$).

$$R_N \leqslant \left(\int\limits_A + \int\limits_B\right) \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^m(1+|y|)^{\beta}}.$$

На множестве A справедливы оценки

$$\int\limits_A \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^m(1+|y|)^{\beta}} \leqslant \frac{c}{(1+|\tilde{x}|)^m} \int\limits_A \frac{dy}{(1+|y|)^{\beta}} \leqslant c(1+|\tilde{x}|)^{-\beta},$$

поскольку $\beta > m$.

На множестве B, переходя к сферическим координатам с центром в $\tilde{x}$, получаем

$$\int\limits_B \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^m(1+|y|)^{\beta}} \leqslant c \int\limits_h^{\frac{1+|\tilde{x}|}{2}} \frac{dt}{t} \sim c\ln\frac{1+|\tilde{x}|}{h}.$$

С учетом (8) получаем

$$\left|\sum_n I_{3,n}^{(2)}\right| \leqslant c\, h^{\alpha} \ln\frac{1+|\tilde{x}|}{h}. \tag{10}$$

Далее, суммируя оценки (9), нам нужно оценить интеграл

$$r_N = \int\limits_{Q_N} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^{m+1-\alpha}(1+|y|)^{\beta}}.$$

Используя то же разбиение $A+B$, имеем

$$\int\limits_{A} (\ldots) \leqslant c,$$

$$\int\limits_{B} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^{m+1-\alpha}(1+|y|)^{\beta}} \leqslant c \int\limits_{h}^{\frac{1+|\tilde{x}|}{2}} \frac{dt}{t^{2-\alpha}} = c\left(\frac{1}{(1+|x|)^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right) \leqslant ch^{-1+\alpha}.$$

Собирая вместе оценки для (9), получаем

$$\left|\sum_{n} I_{3,n}^{(1)}\right| \leqslant ch^{\alpha}.$$

С учетом всех полученных оценок имеем

$$|I_3| \leqslant c\ h^{\alpha} \ln \frac{1+|\tilde{x}|}{h}.$$

Оценки интегралов I_1, I_2 очень похожи. В частности,

$$|I_3| \leqslant c \int\limits_{\in \mathbb{R}^m \setminus Q_N} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^{m-\alpha} \left(\max\{1+|y|,\, 1+|\tilde{x}|\}\right)^{\beta}}$$

$$\leqslant c \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus Q_N} \frac{dy}{|\tilde{x}-y|^{m-\alpha}(1+|y|)^{\beta}} \leqslant c \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus Q_N} \frac{dy}{|y|^{m-\alpha+\beta}} \leqslant \frac{c}{N^{\beta-\alpha}}$$

(N выбрано достаточно большим).

Устремляя N к ∞, окончательно получаем

$$|((P_h K - K_\alpha P_h)u)(\tilde{x})| \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{\alpha} \ln \frac{1+|\tilde{x}|}{h}.$$

Вторая оценка доказывается с помощью более громоздких выкладок, и мы не будем здесь на этом останавливаться. Отметим только, что оценка (9) доказывает близость операторов K и K_d в C_h-норме. $\rhd$

5. Вычислительные алгоритмы

Из результатов предыдущего раздела вытекает, что теоретически можно ожидать сходимость дискретного решения к континуальному при изменении шага решетки. Однако практическое нахождение решения дискретного уравнения (4) — это бесконечная система линейных алгебраических уравнений — наталкивается на проблему выбора конечной аппроксимации.

Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений уже рассматривались в математической литературе [9], где предлагались и обосновывались проекционные методы их решения. В применении к уравнению (4) схема выглядит следующим образом. Если обозначить P_N оператор сужения (проектор) $\mathbb{Z}_h^m$ на дискретный куб $\mathbb{Z}_h^m \cap Q_N$, то уравнение (4) заменяется конечной системой линейных алгебраических уравнений

$$P_N(aI + K_\alpha)u_{d,N} = P_N\, v_d. \tag{11}$$

Теоретические исследования, как правило, ограничиваются обоснованием перехода от (4) к (11), что подразумевает следующее

Утверждение. *Если уравнение* (4) *однозначно разрешимо в пространстве* ℓ_h^2, *то для достаточно больших* N *уравнение* (11) *однозначно разрешимо на подпространстве* $P_N\ell_h^2$.

С практической точки зрения такое утверждение малоэффективно, поскольку при малых h и больших N система (11) может оказаться огромных размеров, и с вычислительной точки зрения труднореализуема.

На наш взгляд, более прагматичной выглядит следующая схема конечной аппроксимации. По дискретному ядру K_d и заданной правой части v_d строятся их периодические аппроксимации посредством сужения на $Q_N \cap \mathbb{Z}_h^m$ и периодического продолжения на $\mathbb{Z}_h^m$. Их мы обозначим $K_{d,N}$ и $v_{d,N}$ соответственно. Вместо уравнения (4) мы рассматриваем уравнение

$$au_{d,N}(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}_h^m} K_{d,N}(\tilde{x} - \tilde{y})u_{d,N}(\tilde{x})h^m = v_{d,N}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}_h^m, \tag{12}$$

и в действительности это конечная система линейных алгебраических уравнений с так называемой циклической сверткой [15, 16]. Аппарат дискретного преобразования Фурье и свойства символа многомерного сингулярного интеграла позволяют обосновать разрешимость уравнения (12) при больших N, быстрое преобразование Фурье — отказаться от решения систем линейных алгебраических уравнений и ограничиться двукратным вычислением преобразования Фурье (прямого и обратного). Кроме того, сравнение численных результатов для простейших типов тестовых уравнений (как регулярных, так и сингулярных), полученных с помощью проекционных методов и быстрым преобразованием Фурье показало их близкое совпадение и серьезный выигрыш по времени (на порядок) в пользу последнего даже в одномерном случае [7]. По всей видимости, при увеличении размерности эта разница будет становиться более ощутимой.

Литература

1. *Абдуллаев С. К.* Многомерный сингулярный интеграл в пространстве Гёльдера с весом // Современные проблемы теории функций. Материалы всесоюзной школы по теории функций.—Баку: АГУ, 1980.—С. 43–48.
2. *Абдуллаев С. К., Васильев В. Б.* Об одной кубатурной формуле для многомерного сингулярного интеграла по ограниченной m-мерной области // Докл. АН Азерб. ССР.—1983.—№ 11.—С. 16–19.
3. *Абдуллаев С. К., Васильев В. Б.* К приближенному решению многомерных сингулярных интегральных уравнений // Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.—Баку: АГУ, 1983.—С. 17–26.
4. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* О дискретных свертках // Тр. междунар. школы-семин. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».—Орел, 2009.—Вып. 7.—С. 31–35.
5. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Дискретные операторы Кальдерона — Зигмунда: некоторые наблюдения // Тр. XIV междунар. симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Ч. 2.—Харьков–Херсон, 2009.—С. 257–260.

6. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Дискретные варианты некоторых интегральных операторов и уравнений // Тр. междунар. школы-семин. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».—Орел, 2010.—Вып. 8.—С. 29–33.
7. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Численное решение некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений // Тр. XV междунар. симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».—Харьков–Херсон, 2011.—С. 108–111.
8. *Mikhlin S. G., Prössdorf S.* Singular integral operators.—Berlin: Akademie-Verlag, 1986.—528 p.
9. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
10. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих.—Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007.—120 с.
11. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—256 с.
12. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.—М.: Наука, 1974.—707 с.
13. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости.—М.: Наука, 1981.—688 с.
14. *Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В.* Интегральные уравнения теории упругости.—СПб: Изд-во СПбГУ, 1994.—272 с.
15. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток.—М.: Радио и связь, 1982.—248 с.
16. *Оппенгейм А., Шафер Г.* Цифровая обработка сигналов.—М.: Техносфера, 2009.—856 с.
17. *Vasilyev V. B.* On certain continual and discrete onvolution operators // Proc. MATHMOD Vienna 09. 6th Vienna Conf. on Math. Modeling (February 11–13, 2009, Vienna University of Technology). Full Papers CD Volume / Eds. I. Troch, F. Breitenecker. Argesim Report № 35.—P. 2616–2618.
18. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений.—М.: Наука, 1971.—248 с.

Статья поступила 24 апреля 2013 г.

Васильев Александр Владимирович
Белгородский государственный университет,
аспирант кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 308007, Белгород, ул. Студенчкская, 14/1
E-mail: alexvassel@gmail.com

Васильев Владимир Борисович
Липецкий государственный технический университет,
профессор кафедры высшей математики
РОССИЯ, 398600, Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: vbv57@inbox.ru

APPROXIMATE SOLUTIONS FOR MULTI-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS AND FAST ALGORITHMS FOR THEIR SOLVING

Vasil'ev A. V., Vasil'ev V. B.

The error estimate for continuous singular integral and the discrete ones in multi-dimensional space is obtained. The use of fast Fourier transform for finding approximate solutions for equations with such operators is suggested.

Key words: Calderon–Zygmund kernel, symbol, discrete singular integral operator, approximate solution, fast Fourier transform.