Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 12–23

УДК **517.983.2**

ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРАХ[1]

М. Н. Гуров, В. А. Ногин

В пространствах Харди H^p, $0 < p < \infty$, изучаются многомерные операторы свертки со степенными особенностями их ядер на конечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности таких операторов из H^p в пространство Λ_s гельдеровских функций, из H^p в пространство Соболева L^∞_k и из BMO в Λ_s.

Ключевые слова: потенциал, пространство Харди, пространство гельдеровских функций, пространство функций с ограниченной средней осцилляцией.

Введение

В работе получены $(H^p - \Lambda_s)$, $(H^p - L^\infty_k)$ и $(BMO - \Lambda_s)$-оценки для операторов

$$M^{\overline{\beta}}_\theta \varphi = m^{\overline{\beta}}_\theta * \varphi \tag{1}$$

с ядрами

$$m^{\overline{\beta}}_\theta(y) = \theta_1(|y|)(r^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1 - 1}\theta_2(|y|)(1 - |y|^2)^{\beta_2 - 1}_+, \tag{2}$$

где $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, $0 < r < 1$. Здесь $\theta_j(r)$ — гладкие функции, $\theta_j(r_i) \neq 0$, $j, i = 1, 2$.

Как показано в работе, символ оператора (1) содержит мультипликаторы, осциллирующие на бесконечности. Это обстоятельство существенно используется при доказательстве соответствующих теорем.

Для получения указанных результатов в работе развивается новый метод, охватывающий случай произвольных s и p, $0 < s, p < \infty$. Этот метод основан на получении специальных представлений для символов рассматриваемых операторов в виде суммы некоторых интегралов, содержащих осциллирующие экспоненты, с последующим применением к этим интегралам метода стационарной фазы и результатов A. Miyachi для «модельных» мультипликаторов вида

$$m^\pm_b(|\xi|) = v(|\xi|^2)|\xi|^{-b}e^{\pm i|\xi|}, \quad b > 0, \tag{3}$$

где $v(r) \in C^\infty(0, \infty)$, $0 \leqslant v(r) \leqslant 1$; $v(r) = 0$, если $r \leqslant 1$ и $v(r) = 1$, если $r \geqslant 2$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 4.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них» и № 8210 «Синтетические методы изучения операторов и уравнений в функциональных пространствах».

В настоящее время имеются работы [6, 7] по $(H^p - \Lambda^s)$ и $(BMO - \Lambda^s)$ оценкам для операторов типа свертки с осциллирующими символами. Отметим, что в указанных работах рассматривались только мультипликаторные операторы, символы которых выписывались явно. Кроме того, имеется ряд работ по $(H^p - H^q)$-оценкам для операторов типа потенциала по $\mathbb{R}^n$ с локальными частями, имеющими особенности на конечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$ (см. [1–4]).

Рассмотренный в статье случай, в котором оператор изначально задается как оператор свертки, намного труднее. Это обусловлено тем, что здесь мы имеем дело не с явными выражениями, а с теми или иными интегральными представлениями для символов рассматриваемых операторов.

1. Основные результаты

Положим $\gamma = \min\{\beta_1, \beta_2\}$. Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. 1) *Оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* H^p *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда*

$$0 < p \leqslant 1, \quad \gamma > 1 + \frac{n}{p} - n, \quad s \leqslant n - \frac{n}{p} + \gamma - 1 \tag{4}$$

или

$$1 < p < \infty, \quad \gamma > \frac{1}{p}, \quad s \leqslant \gamma - \frac{1}{p}; \tag{5}$$

2) *оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* L^1 *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда* $\gamma > 1$, $s \leqslant \gamma - 1$.

Теорема 1.2. *Оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* H^p *в* L_k^∞ *тогда и только тогда, когда* $0 < p \leqslant 1$, $\gamma > 1 + \frac{n}{p} - n$, $k \leqslant n - \frac{n}{p} + \gamma - 1$ *или* $1 < p < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$, $k < \gamma - \frac{1}{p}$.

Теорема 1.3. *Оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* BMO *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда* $s \leqslant \gamma$.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

2.1. Некоторые пространства функций и распределений. Через $H^p = H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, обозначим множество всех S'-распределений таких, что

$$f^+(x) = \sup_{0<\varepsilon<\infty} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \in L^p,$$

где $\varphi \in S$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx \neq 0$, и $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Положим $\|f\|_{H^p} = \|f^+\|_{L^p}$ (см. [5, гл. 3, 4]). Заметим, что при $1 < p < \infty$ пространство H^p изоморфно L^p.

Через $BMO = BMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех локально интегрируемых функций, для которых

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(x) - f_B|\,dx \right\} < \infty,$$

где $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx$, и супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{R}^n$.

Пространство L^∞_k состоит из функций $f \in S'$ таких, что

$$\|f\|_{L^\infty_k} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty} < \infty.$$

Пусть $s > 0$ и $s = k + \varepsilon$, где $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Для функции $f \in C^k$, положим

$$\|f\|_{\widetilde{\Lambda}_s} = \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|=k} \sup\limits_{x\neq y} \left\{ \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\varepsilon} \right\}, & 0 < \varepsilon < 1; \\ \sum\limits_{|\alpha|=k} \sup\limits_{x\neq y} \left\{ \frac{|D^\alpha f(x) - 2D^\alpha f\left(\frac{x+y}{2}\right) + D^\alpha f(y)|}{|x-y|} \right\}, & \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Через $\widetilde{\Lambda_s}$ и Λ_s обозначим пространства функций $f(x)$ класса C^k, для которых $\|f\|_{\widetilde{\Lambda_s}} < \infty$ и $\|f\|_{\Lambda_s} = \|f\|_{L^\infty_k} + \|f\|_{\widetilde{\Lambda_s}} < \infty$ соответственно.

Заметим, что $\Lambda_{s_1} \subset \Lambda_{s_2}$, $0 < s_2 < s_1$.

Пусть далее X — одно из пространств H^p $(0 < p < \infty)$, L^1 или BMO; Y — одно из пространств Λ_s $(0 < s < \infty)$ или L^∞_k $(k \in \mathbb{N})$. Следуя [6], через $\mathscr{K}(X, Y)$ обозначим пространство всех $K \in S'$ таких, что

$$\|K\|_{\mathscr{K}(X,Y)} = \sup\left\{ \frac{\|K * f\|_Y}{\|f\|_X} : \ f \in S \cap X, \ \|f\|_X \neq 0 \right\} < \infty.$$

Через $\mathscr{M}(X, Y)$ обозначим множество обобщенных функций $m \in S'$ таких, что

$$\|m\|_{\mathscr{M}(X,Y)} = \sup\left\{ \frac{\|F^{-1}(m\widehat{f})\|_Y}{\|f\|_X} : \ f \in S \cap X, \ \|f\|_X \neq 0 \right\} < \infty.$$

Таким образом,

$$\|m\|_{\mathscr{M}(X,Y)} = \|F^{-1} m\|_{\mathscr{K}(X,Y)}. \tag{6}$$

2.2. О некоторых Фурье-мультипликаторах. Для мультипликатора (3) справедлива

Теорема 2.1 [6, с. 284]. *Имеют место соотношения:*

1) $m^\pm_b(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s)$ *тогда и только тогда, когда* $0 < p \leqslant 1$, $\frac{n}{p} \leqslant b - s + \frac{n-1}{2}$ *или* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} \leqslant b - s - \frac{n-1}{2}$;

2) $m^\pm_b(|\xi|) \in \mathscr{M}(L^1, \Lambda_s)$ *тогда и только тогда, когда* $b - s \geqslant \frac{n+1}{2}$;

3) $m^\pm_b(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, L^\infty_k)$ *тогда и только тогда, когда* $0 < p \leqslant 1$, $\frac{n}{p} \leqslant b - k + \frac{n-1}{2}$ *или* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} < b - k - \frac{n-1}{2}$.

Нам понадобятся также следующие утверждения:

Теорема 2.2. *Пусть* $0 < p < \infty$ *и* $k = 1 + \max\{[n(1/p - 1/2)], [n/2]\}$. *Если* $m(\xi)$ *ограниченная функция класса* $C^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *и*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha m(\xi) \right| \leqslant B|\xi|^{-|\alpha|}$$

для $|\alpha| \leqslant k$, *то* $m \in \mathscr{M}(H^p, H^p)$.

В случае $1 < p < \infty$ — это теорема Михлина, доказательство которой приведено в [8]; относительно случая $0 < p \leqslant 1$ см. [5, с. 163–171].

Лемма 2.1. *Если* $g \in C^\infty_0$, *то* $g \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s)$ *для* $p, s > 0$.

Утверждение леммы вытекает из неравенства (см. [9, с. 100–101]):

$$|(f * \Phi)(x)| \leqslant C\|f\|_{H_p}, \quad 0 < p < \infty,\ \Phi \in S.$$

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — неотрицательные целые числа, определим оператор R_α равенством

$$R_\alpha f = F^{-1}\left(\left(-i \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)^\alpha \widehat{f}(\xi)\right), \quad f \in L^2.$$

Теорема 2.3 [6, с. 271]**.** *Пусть $l \in N$ и $p > (n-1)/(n-1+l)$. Тогда $f \in L^2 \cap H^p$ тогда и только тогда, когда $R_\alpha f \in L^2 \cap L^p$ для всех $|\alpha| \leqslant l$ и*

$$C\|f\|_{H^p} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|R_\alpha f\|_{L^p} \leqslant C'\|f\|_{H^p}, \quad f \in L^2 \cap H^p.$$

2.3. Равномерное асимптотическое разложение для функции Бесселя $J_\nu(z)$. Пусть $\Omega = \{z \in C : |z| > \eta, |\arg z| < \theta\}$, где $\eta > 0$, $\theta \in (0, \pi/2)$. Представляя $J_\nu(z)$ в виде линейной комбинации функций Ганкеля $H^{(1)}_{\pm\nu}(z)$ и $H^{(2)}_{\pm\nu}(z)$ (где берется $+\nu$, если $\nu > -1/2$, и $-\nu$ в противном случае), и, применяя результаты из [10, с. 220], приходим к равенству:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[e^{-iz}\left(\sum_{l=0}^{N} \frac{C^{(\nu)}_{l,-}}{z^l} + R^{(\nu)}_{N,-}(z)\right) + e^{iz}\left(\sum_{l=0}^{N} \frac{C^{(\nu)}_{l,+}}{z^l} + R^{(\nu)}_{N,+}(z)\right)\right], \tag{7}$$

где $C^{(\nu)}_{0,\pm} = \frac{1}{2} e^{\mp(i\pi/4)(2\nu+1)}$,

$$R^{(\nu)}_{N,\pm}(z) = \frac{B^\pm_N}{z^{N+1}} \cdot Q^{(\nu)}_{N,\pm}(z), \tag{8}$$

$$Q^{(\nu)}_{N,\pm}(z) = \int_0^1 (1-t)^N\, dt \cdot \int_0^{\infty\cdot\exp(i\alpha)} e^{-u} u^{\nu+N+1/2}\left(1 - \frac{ut}{\pm 2iz}\right)^{\nu-N-3/2} du, \tag{9}$$

$$z \in \Omega, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

2.4. Асимптотическое разложение некоторых интегралов, содержащих осциллирующую экспоненту. Анализ доказательства леммы Эрдейи, приведенного в [11], показывает, что справедлива следующая

Лемма 2.2. *Пусть $\beta > 0$, $f(x) \in C^\infty([0, a])$ и $f^{(j)}(a) = 0$, $j = 0, 1, \ldots$ Тогда*

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{\pm i\lambda x}\, dx = a^\pm_\beta \lambda^{-\beta} + W^{\pm,\beta}_1(\lambda), \quad \lambda \geqslant 1, \tag{10}$$

где $a^\pm_\beta = f(0)\Gamma(\beta)(\pm i)^\beta$;

$$\left|\left(W^{\pm,\beta}_1(\lambda)\right)^{(j)}\right| \leqslant \frac{C^{\pm,j}}{\lambda^{1+\beta+j}}, \quad \lambda > 1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

постоянные $C^{\pm,j}$ не зависят от λ.

3. Представление для символа оператора $M_\theta^{\overline{\beta}}$

Оператор $M_\theta^{\overline{\beta}}$ представим в виде

$$\big(M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi\big)(x) = \big(M_\theta^{\overline{\beta},0}\big)(x) + \big(M_{\theta,1}^{\beta_1}\big)(x) + \big(M_{\theta,2}^{\beta_1}\varphi\big)(x) + \big(S_\theta^{\beta_2}\varphi\big)(x),$$

где

$$\big(M_\theta^{\overline{\beta},0}\varphi\big)(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} \big(1-\omega_1(|y|)\big)\big(1-\omega_2(|y|)\big) m_\theta^{\overline{\beta}}(y)\,\varphi(x-y)\,dy, \tag{12}$$

$$\big(M_{\theta,1}^{\beta_1}\varphi\big)(x) = \int\limits_{r-\delta\leqslant|y|\leqslant r} (r-|y|)^{\beta_1-1} f_1(|y|)\,\varphi(x-y)\,dx, \tag{13}$$

$$\big(M_{\theta,2}^{\beta_1}\varphi\big)(x) = e^{i\pi(\beta_1-1)} \int\limits_{r\leqslant|y|\leqslant r+\delta} (|y|-r)^{\beta_1-1} f_1(|y|)\,\varphi(x-y)\,dx, \tag{14}$$

$$\big(S_\theta^{\beta_2}\varphi\big)(x) = \int\limits_{1-\delta\leqslant|y|\leqslant 1} (1-|y|)^{\beta_2-1} f_2(|y|)\,\varphi(x-y)\,dx. \tag{15}$$

Здесь

$$f_1(|y|) = (r+|y|)^{\beta_1-1}\omega_1(|y|)\theta_1(|y|)(1-\omega_2(|y|))\theta_2(|y|)(1-|y|^2)^{\beta_2-1},$$

$$f_2(|y|) = (1-\omega_1(|y|))\theta_1(|y|)\omega_2(|y|)\theta_2(|y|)e^{i\pi(\beta_1-1)}(1+|y|)^{\beta_2-1}(|y|^2-r^2)^{\beta_1-1}.$$

Функции $\omega_j(t)\in C^\infty([0;1])$ таковы, что $0\leqslant\omega_j(t)\leqslant 1$, $\omega_j(t)=0$, если $t\notin[r_j-\delta; r_j+\delta]$ и $\omega_j(t)=1$, если $t\in\big[r_j-\frac{\delta}{2}; r_j+\frac{\delta}{2}\big]$, $j=1,2$, $r_1=r$, $r_2=1$, $\delta\in(0,\frac{1-r}{2})$.

Рассмотрим оператор (12). Обозначим

$$m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}(y) = (1-\omega_1(|y|))(1-\omega_2(|y|))m_\theta^{\overline{\beta}}(y),$$

$$u_1(\rho) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(r^2-\rho^2+i_0)^{\beta_1-1}(1-\rho^2)^{\beta_2-1}\theta_1(\rho)(1-\omega_1(\rho))\theta_2(\rho)(1-\omega_2(\rho)).$$

Имеем

$$\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) = (1-v(|\xi|^2))\,\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) + v(|\xi|^2)\,\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi),$$

где

$$\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^{1-\frac{\delta}{2}} \rho^{n-1}u_1(\rho)\,d\rho \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi\cdot\tau)}\,d\tau.$$

Воспользовавшись формулой (см. [8, с. 37])

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{i(x\cdot\sigma)}d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}}\,J_{\frac{n}{2}-1}(|x|), \tag{16}$$

получаем

$$v(|\xi|^2)\,\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) = \frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n}{2}-1}} \int\limits_0^{1-\frac{\delta}{2}} u_1(\rho)\rho^{\frac{n}{2}}\,J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|\xi|)\,d\rho.$$

Проинтегрировав по частям ℓ раз последний интеграл, с учетом рекуррентной формулы (5.52(1)) из [13]: $\int z^{n+1} J_n(z)\, dz = z^{n+1} J_{n+1}(z)$, будем иметь

$$v(|\xi|^2)\, \widehat{m^{\beta}_{\theta,0}}(\xi) = \frac{(-1)^\ell v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+\ell}} \int\limits_0^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\frac{d}{d\rho}\,\frac{1}{\rho}\right)^\ell (\rho u_1(\rho))\, \rho^{\frac{n-2}{2}+\ell}\, J_{\frac{n-2}{2}+\ell}(\rho|\xi|)\, d\rho.$$

Пусть функция $\widetilde{v}(|\xi|^2)$ такова, что $\widetilde{v}(r^2) \in C^\infty(0;\infty)$, $\widetilde{v}(r^2) = 0$, если $r^2 \leqslant 1$, $\widetilde{v}(r^2) = 1$, если $r^2 \geqslant 2$ и $0 \leqslant \widetilde{v}(r^2) \leqslant 1$; тогда $v(r^2) \cdot \widetilde{v}(r^2) = v(r^2)$.

С учетом леммы 2.2, имеем

$$\begin{aligned} v(|\xi|^2)\, \widehat{m^{\beta}_{\theta,0}}(\xi) &= \frac{v(|\xi|^2) e^{i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_1}} \cdot \frac{(-1)^\ell \widetilde{v}(|\xi|^2) e^{-i|\xi|}}{|\xi|^{\ell-\beta_1-\frac{1}{2}}} \\ &\times \int\limits_0^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\frac{d}{d\rho}\,\frac{1}{\rho}\right)^\ell (\rho u_1(\rho))\rho^{\frac{n-2}{2}+\ell}\, J_{\frac{n-2}{2}+\ell}(\rho\xi)\, d\rho; \end{aligned} \tag{17}$$

о выборе ℓ будет сказано ниже.

Символ $\widehat{m^{\beta_1}_{\theta,1}}(\xi)$ оператора $M^{\beta_1}_{\theta,1}$ запишем в виде

$$\widehat{m^{\beta_1}_{\theta,1}}(\xi) = \int\limits_{r-\delta}^{r} \rho^{n-1}(r-\rho)^{\beta_1-1} f_1(\rho)\, d\rho \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}\, d\sigma,$$

$$\widehat{m^{\beta_1}_{\theta,1}}(\xi) = (1 - v(|\xi|^2))\, \widehat{m^{\beta_1}_{\theta,1}}(\xi) + v(|\xi|^2)\, \widehat{m^{\beta_1}_{\theta,1}}(\xi) \equiv \widehat{m^{\beta_1,0}_{\theta,1}}(\xi) + \widehat{m^{\beta_1,\infty}_{\theta,1}}(\xi).$$

Рассмотрим символ $\widehat{m^{\beta_1,\infty}_{\theta,1}}(\xi)$ оператора (13). Применив формулу (16) и формулу (7) с $N = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, будем иметь

$$\widehat{m^{\beta_1,\infty}_{\theta,1}}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} \left(h_1^{\beta_1,k,-}(|\xi|) + h_1^{\beta_1,k,+}(|\xi|)\right) + R_1^{\beta_1,N,-}(|\xi|) + R_1^{\beta_1,N,+}(|\xi|),$$

где

$$h_1^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|) = \frac{\gamma_{k,\pm} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \int\limits_{r-\delta}^{r} \rho^{\frac{n-1}{2}-k}(r-\rho)^{\beta_1-1} f_1(\rho)\, e^{\pm i\rho|\xi|}\, d\rho, \quad 0 \leqslant k \leqslant N,$$

$$\gamma_{0,\pm} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{\mp\frac{i\pi}{4}(n-1)},$$

$$R_1^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|) = \frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_{r-\delta}^{r} \rho^{\frac{n-1}{2}}(r-\rho)^{\beta_1-1} f_1(\rho)\, e^{\pm i\rho|\xi|} R_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|\xi|)\, d\rho.$$

После замены $r - \rho = \tau$ мультипликатор $h_1^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|)$ примет вид

$$h_1^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|) = \frac{\gamma_{k,\pm} e^{\pm ir|\xi|} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \int\limits_0^{\delta} \tau^{\beta_1-1}(r-\tau)^{\frac{n-1}{2}-k} f_1(r-\tau)\, e^{\mp i|\xi|\tau}\, d\tau.$$

С учетом леммы 2.2 будем иметь

$$h_1^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|)=\gamma_{k,\pm}v(|\xi|^2)e^{\pm ir|\xi|}\cdot|\xi|^{\frac{1-n}{2}-k-\beta_1}\cdot\widetilde{v}(|\xi|^2)\left(a_{\beta_1}^{k,\mp}+|\xi|^{\beta_1}W_1^{\mp,\beta_1}(|\xi|)\right);$$

для мультипликатора $W_1^{\mp,\beta_1}(|\xi|)$ справедливо неравенство (11).

Рассмотрим мультипликатор $R_1^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|)$. После замены $r-\rho=\tau$, с учетом равенства (8), получаем

$$R_1^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|)=\frac{B_N^{\pm}e^{\pm ir|\xi|}v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+N+1}}\int\limits_0^{\delta}\frac{\tau^{\beta_1-1}f_1(r-\tau)}{(r-\tau)^{N+1-\frac{n-1}{2}}}\,e^{\mp i|\xi|\tau}Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}((r-\tau)|\xi|)\,d\tau.$$

Применяя лемму 2.2, будем иметь

$$R_1^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|)=\frac{B_N^{\pm}v(|\xi|^2)e^{\pm ir|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+N+1+\beta_1}}\cdot\widetilde{v}(|\xi|^2)\Big(a_{\beta_1}^{N+1,\mp}(|\xi|)+|\xi|^{\beta_1}W_1^{\mp,\beta_1}(|\xi|)\Big),$$

где $a_{\beta_1}^{N+1,\mp}(|\xi|)=a_{\beta_1}^{N+1,\mp}\cdot Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(r|\xi|)$, $Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(z)$ имеет вид (9).

Символ $\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi)$ оператора (14) запишем в виде

$$\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi)=e^{i\pi(\beta_1-1)}\int\limits_r^{r+\delta}\rho^{n-1}(\rho-r)^{\beta_1-1}f_1(\rho)\,d\rho\int\limits_{S^{n-1}}e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}\,d\sigma.$$

Имеем

$$\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi)=(1-v(|\xi|^2))\,\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi)+v(|\xi|^2)\,\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi)\equiv\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1,0}}(\xi)+\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1,\infty}}(\xi).$$

Аналогично разложению мультипликатора $\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi)$, для $\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1,\infty}}(\xi)$ имеет место разложение:

$$\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1,\infty}}(\xi)=\sum_{k=0}^{N}\left(h_2^{\beta_1,k,-}(|\xi|)+h_2^{\beta_1,k,+}(|\xi|)\right)+R_2^{\beta_1,N,-}(|\xi|)+R_2^{\beta_1,N,+}(|\xi|),$$

где

$$h_2^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|)=e^{i\pi(\beta_1-1)}\gamma_{k,\pm}\frac{v(|\xi|^2)e^{\pm ir|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k+\beta_1}}\widetilde{v}(|\xi|^2)\Big(a_{\beta_1}^{k,\mp}+|\xi|^{\beta_1}W_1^{\mp,\beta_1}(|\xi|)\Big);$$

$$R_2^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|)=\frac{e^{i\pi(\beta_1-1)}B_N^{\pm}v(|\xi|^2)e^{\pm ir|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+N+1+\beta_1}}\cdot\widetilde{v}(|\xi|^2)\Big(a_{\beta_1}^{N+1,\mp}(|\xi|)+|\xi|^{\beta_1}W_2^{\mp,\beta_1}(|\xi|)\Big),$$

$$a_{\beta_1}^{N+1,\mp}(|\xi|)=a_{\beta_1}^{N+1,\mp}\cdot Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(r|\xi|),$$

где $Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(z)$ имеет вид (9).

Символ оператора (15) запишем в виде

$$\widehat{s_\theta^{\beta_2}}(\xi)=\int\limits_{1-\delta}^{1}\rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta_2-1}u_2(\rho)\,\omega_2(\rho)\,d\rho\int\limits_{S^{n-1}}e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}\,d\sigma$$

$$=(1-v(|\xi|^2))\,\widehat{s_\theta^{\beta_2}}(\xi)+v(|\xi|^2)\,\widehat{s_\theta^{\beta_2}}(\xi)\equiv\widehat{s_\theta^{\beta_2,0}}(\xi)+\widehat{s_\theta^{\beta_2,\infty}}(\xi).$$

Рассмотрим мультипликатор $\widehat{s_\theta^{\beta_2,\infty}}(\xi)$. Аналогично разложению для $\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi)$, с учетом формулы (16) и формулы (7) с $N = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, получаем

$$\widehat{s_\theta^{\beta_2,\infty}}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} \left(h_3^{\beta_2,k,-}(|\xi|) + h_3^{\beta_2,k,+}(|\xi|)\right) + R_3^{\beta_2,N,-}(|\xi|) + R_3^{\beta_2,N,+}(|\xi|), \tag{18}$$

где

$$R_3^{\beta_2,N,\pm}(|\xi|) = \frac{B_N^{\pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+N+1+\beta_2}} \cdot \widetilde{v}(|\xi|^2) \cdot \Big(a_{\beta_2}^{N+1,\mp}(|\xi|) + |\xi|^{\beta_2} W_3^{\mp,\beta_2}(|\xi|)\Big),$$

$$a_{\beta_2}^{N+1,\mp}(|\xi|) = \gamma_{N+1,\pm}\, u_2(1)(\mp i)^{\beta_2}\, \Gamma(\beta_2)\, Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(|\xi|).$$

Таким образом, символ оператора $M_\theta^{\overline{\beta}}$ имеет вид:

$$\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}(\xi)} = \mu(\xi) + R(\xi), \tag{19}$$

где

$$\mu(\xi) = \frac{v(|\xi|^2) e^{i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_1}} + C_1 \frac{v(|\xi|^2) e^{ir|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_1}} + C_2 \frac{v(|\xi|^2) e^{-ir|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_1}} + \frac{v(|\xi|^2) e^{i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_2}} + \frac{v(|\xi|^2) e^{-i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_2}},$$

$$R(\xi) = \widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) + \widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi) + \widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi) + \widehat{s_\theta^{\beta_2,\infty}}(\xi) - \mu(\xi).$$

Здесь $C_1 = \gamma_{0,+}(1 + e^{i\pi(\beta_1-1)})$, $C_2 = \gamma_{0,-}(1 + e^{i\pi(\beta_1-1)})$.

4. Доказательство основных результатов

$\lhd$ Доказательство теоремы 1.1. Докажем утверждение 1) теоремы 1.1. Изложим схему доказательства. Допустим, мы доказали, что $m_\theta^{\overline{\beta}}(y) \in \mathscr{K}(H^p, \Lambda_s)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (3) или (4). Заметим, что функция $\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)$ является мультипликатором в S. Тогда потенциал (1) определен на всем S' (поскольку $m_\theta^{\overline{\beta}}(y)$ является свертывателем в S) и, следовательно, на всем H^p. Как показано в [6, замечание 2.3], при выполнении указанных условий неравенство

$$\left\|M_\theta^{\beta}\varphi\right\|_{\Lambda_s} \leqslant \left\|m_\theta^{\overline{\beta}}\right\|_{\mathscr{K}(H^p,\Lambda_s)} \|\varphi\|_{H^p} \tag{20}$$

справедливо для всех $\varphi \in H^p$.

Отметим, что класс S не плотен в H^p, $0 < p \leqslant 1$, поэтому, как показано в работе [6, с. 275], для доказательства теорем 1.1 и 1.2 достаточно получить оценки (20) для функций $\varphi \in S \cap H^p$.

Итак, с учетом (6) достаточно показать, что

$$\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s).$$

Рассмотрим символ $\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi)$ оператора $M_\theta^{\overline{\beta},0}$. Заметим, что $(1 - v(|\xi|^2))\, \widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) \in C_0^\infty$. Тогда

$$(1 - v(|\xi|^2))\, \widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \quad 0 < p, s < \infty, \tag{21}$$

в силу леммы 2.1.

Полагая

$$\ell = [\beta_1] + 3 + \max\left\{\left[n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right], \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$$

в равенстве (17), получаем с учетом п. 1) теоремы 2.1, что

$$\frac{v(|\xi|^2)e^{i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_1}} \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s) \tag{22}$$

тогда и только тогда, когда

$$0 < p \leqslant 1, \quad \beta_1 > \frac{n}{p} - n + 1, \quad s \leqslant n - \frac{n}{p} + \beta_1 - 1 \tag{23}$$

или

$$1 < p < \infty, \quad \beta_1 > \frac{1}{p}, \quad s \leqslant \beta_1 - \frac{1}{p}. \tag{24}$$

Кроме того,

$$\frac{(-1)^\ell \widetilde{v}(|\xi|^2)}{|\xi|^{\ell-\beta_1-\frac{1}{2}} e^{i|\xi|}} \int\limits_0^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\frac{d}{d\rho}\,\frac{1}{\rho}\right)^\ell \frac{(\rho u_1(\rho))}{\rho^{\frac{2-n}{2}-\ell}}\, J_{\frac{n-2}{2}+\ell}(\rho|\xi|)\, d\rho \in \mathscr{M}(H^p, H^p), \quad 0 < p < \infty, \tag{25}$$

по теореме 2.2 и является мультипликатором в S. Из соотношений (21), (22) и (25) следует, что

$$\widehat{m_{\theta,0}^{\overline{\beta}}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s) \tag{26}$$

тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (23) или (24).

Рассмотрим символ $\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi)$ оператора $M_{\theta,1}^{\beta_1}$. Заметим, что

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,0}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \quad 0 < p, s < \infty, \tag{27}$$

в силу леммы 2.1.

Рассмотрим мультипликатор $\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi)$. Отметим, что

$$\frac{v(|\xi|^2)e^{\pm ir|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_1}} \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s) \tag{28}$$

тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (23) или (24) (в силу п. 1 теоремы 2.1). Кроме того,

$$\gamma_{0,\pm}\widetilde{v}(|\xi|^2)\Big(a_{\beta_1}^{0,\mp} + |\xi|^{\beta_1} W_1^{\mp,\beta_1}(|\xi|)\Big) \in \mathscr{M}(H^p, H^p), \quad 0 < p < \infty,$$

по теореме 2.2 и является мультипликатором в S. Тогда

$$h_1^{\beta_1,0,\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s) \tag{29}$$

тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (23) или (24).

Аналогично (28)–(29) доказывается, что

$$h_1^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{30}$$

$$R_1^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \tag{31}$$

если выполнены неравенства (23) или (24).

Из (29)–(31) получаем, что

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \tag{32}$$

при выполнении неравенств (23) или (24).

Из (27) и (32) следует, что

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \tag{33}$$

когда выполнены условия (23) или (24).

Рассуждая аналогично (27)–(33), заключаем, что

$$\widehat{m_{\theta,2}^{\beta_1}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \tag{34}$$

если выполнены неравенства (23) или (24).

Применяя аналогичные рассуждения к мультипликатору $\widehat{s_\theta^{\beta_2}}(\xi)$ (см. (18)), заключаем, что

$$\widehat{s_\theta^{\beta_2}}(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s), \tag{35}$$

если $0 < p \leqslant 1$, $\beta_2 > \frac{n}{p} - n + 1$, $s \leqslant n - \frac{n}{p} + \beta_2 - 1$ или $1 < p < \infty$, $\beta_2 > \frac{1}{p}$, $s \leqslant \beta_2 - \frac{1}{p}$.

Из (26), (33) (34) и (35) следует, что

$$m_\theta^{\overline{\beta}}(y) \in \mathscr{K}(H^p, \Lambda_s),$$

если выполнены неравенства (3) или (4).

Покажем, что полученные оценки являются точными. Пусть

$$0 < p \leqslant 1, \quad \gamma > n - \frac{n}{p} - 1, \quad s > n - \frac{n}{p} + \gamma - 1. \tag{36}$$

Заметим, что $\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}(\xi)} - \mu(\xi) \in \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s)$. Докажем, что $\mu(\xi) \notin \mathscr{M}(H^p, \Lambda_s)$ при выполнении условий (36).

Рассмотрим случай, когда $\gamma = \beta_1$ (случаи, когда $\gamma = \beta_2$ и $\gamma = \beta_1 = \beta_2$ рассматриваются аналогично).

Следуя [6], рассмотрим функцию $f_\lambda(x) = F^{-1}(v(|\xi|^2)|\xi|^{-\lambda})(x)$, где $\lambda = 1 + s - \beta_1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 + s - \beta_1$. Покажем, что $F^{-1}\mu * f_\lambda \notin \Lambda_s$, $s > n - \frac{n}{p} + \beta_1 - 1$, $\max\left\{0; n - \frac{n}{p}\right\} < \lambda < 1 + s - \beta_1$.

Имеем

$$(F^{-1}\mu * f_\lambda)(x) = F^{-1}\left(\frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{(n+1)}{2}+s-\varepsilon}}\left(a_\beta^- e^{ir|\xi|} + a_\beta^+ e^{-ir|\xi|} + e^{i|\xi|}\right)\right)(x) \equiv K_{1,b}(x).$$

Выберем $l > [\beta_1] + [s] + 1$ в теореме 2.3. С учетом формулы

$$R_\alpha K_{1,b}(|\xi|) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha K_{1,b+|\alpha|}(|\xi|),$$

получаем, что $K_{1,b}(x) \in \Lambda_s$ тогда и только тогда, когда $D^\alpha K_{1,b+|\alpha|}(x) \in \Lambda_s$.

В силу равенства (5.2) из [6], имеем

$$D^\alpha K_{1,b+|\alpha|}(x) = A(1-r)^{s-\varepsilon-|\alpha|} + A\left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha (r - |x| + i0)^{s-\varepsilon-|\alpha|} + o(r-|x|)^{s-\varepsilon-|\alpha|} \tag{37}$$

при $|x| \to r$, где

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i\pi(n-b-|\alpha|)}{2}} \cdot \Gamma(|\alpha| - s + \varepsilon).$$

Полагая в (37) $|\alpha| = [\beta_1] + [s] + 1$ получаем, что $s - \varepsilon - |\alpha| < 0$. Отсюда следует, что $D^\alpha K_{1,b}(x) \notin \Lambda_s$. Следовательно, $K_{1,b}(x) \notin \Lambda_s$.

Аналогично доказывается точность полученных оценок при $1 < p < \infty$, $s \geqslant \gamma - \frac{1}{p}$.

Повторяя изложенные рассуждения, используя теорему 2.1 п. 2) и п. 3), получаем утверждение 2 теоремы 1.1 и теорему 1.2. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1.3. В силу равенства (см. [6, с. 277])

$$\mathscr{K}(H^p, H^1) = \mathscr{K}(BMO, \Lambda_s), \quad 0 < p < 1, \; s = \frac{n}{p} - n, \tag{38}$$

достаточно доказать, что $m_\theta^{\overline{\beta}}(y) \in \mathscr{K}(H^p, H^1)$. В [12] показано, что

$$m_\theta^{\overline{\beta}}(y) \in \mathscr{K}(H^p, H^1) \Leftrightarrow \gamma \geqslant \frac{n}{p} - n. \tag{39}$$

Из (38) и (39) вытекает теорема 1.2. $\rhd$

5. Некоторые заключительные замечания

В заключение отметим, что доказанные теоремы обобщаются на случай ядер вида

$$m_\theta^{\overline{\beta}}(y) = \theta_1(|y|)(r_1^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1 - 1} \times \ldots \times \theta_{l-1}(|y|)(r_{l-1}^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_{l-1}-1} \theta_l(|y|)(1 - |y|^2)_+^{\beta_l - 1},$$

где

$$\theta_j(r_i) \neq 0, \quad j, i = 1, 2, \ldots, l.$$

Положим $\gamma = \min_{1 \leqslant j \leqslant l} \beta_j$.

Теорема 5.1. 1) *Оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* H^p *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда* $0 < p \leqslant 1$, $\gamma > 1 + \frac{n}{p} - n$, $s \leqslant n - \frac{n}{p} + \gamma - 1$ *или* $1 < p < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$, $s \leqslant \gamma - \frac{1}{p}$;

2) *оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* L^1 *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда* $\gamma > 1$, $s \leqslant \gamma - 1$.

Теорема 5.2. *Оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* BMO *в* Λ_s *тогда и только тогда, когда* $s \leqslant \gamma$.

Теорема 5.3. *Предположим, что* $\min\left\{n - \frac{n}{p} + \gamma - 1; \gamma - \frac{1}{p}\right\} \geqslant 1$. *Оператор* $M_\theta^{\overline{\beta}}$ *ограничен из* H^p *в* L_k^∞ *тогда и только тогда, когда* $0 < p \leqslant 1$, $\gamma > 1 + \frac{n}{p} - n$, $k \leqslant n - \frac{n}{p} + \gamma - 1$ *или* $1 < p < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$, $k < \gamma - \frac{1}{p}$.

Литература

1. *Nogin V. A., Luzhetskaya P. A.* Inversion and description of the ranges of multiplier operators of Strichartz–Peral–Miyachi-type // Fract. Calc. Appl. Anal.—2000.—Vol. 3, № 1.—P. 87–96.
2. *Nogin V. A., Karasev D. N.* On the $\mathscr{L}$-characteristic of some potential-type operators with radial kernels, having singularities on a sphere // Fract. Calc. Appl. Anal.—2001.—Vol. 4, № 3.—P. 343–366.

3. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. нац. акад. наук Армении.—2003.—Т. 38, вып. 2.—С. 37–62.
4. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 3.—С. 21–29.
5. *Fefferman C. L., Stein E. M.* H^p-spaces of several variables // Acta Math.—1972.—Vol. 129.—P. 137–193.
6. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ.—Tokyo: Sect. IA Math.—1981.—Vol. 28.—P. 267–315.
7. *Miyachi A.* Notes on Fourier multipliers for H^p, BMO and the Lipschitz spaces // J. Fac. Sci. Univ.—Tokyo: Sect. IA Math.—1983.—Vol. 30, № 2.—P. 221–242.
8. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London: Taylor & Frances, 2002.—359 p.—(Analytical Methods and Special Functions. Vol. 5).
9. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable method, Orthogonality, and Oscillatory Integrls.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
10. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.—798 с.
11. *Федорюк М. В.* Метод перевала.—М.: Наука, 1977.—368 с.
12. *Гиль А. В., Задорожный А. И., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов свертки с особенностями ядер на сферах // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.—2011.—№ 2 (23).—С. 17–23.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1971.—1108 с.

Статья поступила 17 февраля 2013 г.

Гуров Михаил Николаевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Муркуса, 22;
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
E-mail: MGurov@inbox.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nogin@math.rsu.ru

ESTIMATES FOR SOME POTENTIAL TYPE OPERATORS WHOSE KERNELS HAVE SINGULARITIES ON SPHERES

Gurov M. N., Nogin V. A.

Multidimensional convolution operators whose kernels have power-type singularities on a finite union of spheres in $\mathbb{R}^n$ are studied on Hardy spaces H^p, $0 < p < \infty$. Necessary and sufficient conditions are obtained for such operators to be bounded from H^p into the Holder space Λ_s, from H^p into the Sobolev space L_k^∞, and from BMO into Λ_s.

Key words: potential, Hardy spaces, space of Hölder functions, bounded mean oscillation.