Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 30–41

УДК **517.956**

НЕЛОКАЛЬНАЯ КОМБИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ — САМАРСКОГО И САМАРСКОГО — ИОНКИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

И. Г. Мамедов

В работе рассматривается краевая задача для системы псевдопараболических уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами и условиями Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина. Найдено интегральное представление функции в пространстве Соболева, которое позволяет однозначно восстановить ее посредством значений некоторых (определяющих) операторов, принимаемых на этой функции. Также, дается постановка задачи Гурса с неклассическими краевыми условиями.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, нелокальная задача.

Введение

В данной статье в одном анизотропном пространстве С. Л. Соболева исследуется нелокальная комбинированная задача типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина для одного векторного уравнения псевдопараболического типа с доминирующей производной четвертого порядка с негладкими коэффициентами. Особо нужно отметить, что для нелокальных задач типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина началось с работы [1] и продолжено в работах [2–5] и др.

Для достаточно адекватного описания большинства реальных процессов, происходящих в природе, технике и т. д., привлекаются псевдопараболические уравнения [6–8]. Многие процессы, возникающие в теории фильтрации жидкости в трещиноватых средах [9], описываются псевдопараболическими уравнениями с разрывными коэффициентами. При этом математическая модель процесса дополняется нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина [10]. Актуальность исследований, проводимых в этой области, объясняется появлением локальных и нелокальных граничных задач для уравнений с разрывными коэффициентами, связанных с различными прикладными задачами. Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании вопросов фильтрации жидкости в пористых средах, влагопереноса в грунтах, распространения импульсных лучевых волн, в различных биологических процессах и в теории обратных задач. Поэтому тематика данной работы весьма актуальна для решения многих теоретических и практических задач.

Ниже для исследования таких задач предложена методика, которая использует современные методы теории функций и функционального анализа. Она изложена в основном применительно к псевдопараболическим уравнениям четвертого порядка с разрывными коэффициентами. При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа P-интегрируемости и ограниченности, т. е. рассмотренный псевдопараболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряженного оператора. Даже в частном случае, например, при условиях Гурса функция Римана для такого уравнения не может быть исследована классическим методом характеристик.

1. Постановка задачи

Пусть задано уравнение

$$(V_{1,3}u)(t,x) \equiv D_t D_x^3 u(t,x) + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j<4}}^{1} \sum_{j=0}^{3} \big(D_t^i D_x^j u(t,x)\big) A_{i,j}(t,x) = Z_{1,3}(t,x),$$
$$(t,x) \in G := (t_0,t_1) \times (x_0,\, x_1), \tag{1}$$

начальное условие

$$(l_0 u)(x) \equiv u(t_0,x) = Z_0(x), \quad x \in (x_0,x_1), \tag{2}$$

и граничные условия типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина [11]

$$\begin{aligned}
(l_1^0 u)(t) &\equiv u(t,x_0)\alpha_{1,1} + u_x(t,x_0)\alpha_{1,2} + u_{xx}(t,x_0)\alpha_{1,3} + u(t,x_1)\beta_{1,1} \\
&\quad + u_x(t,x_1)\beta_{1,2} + u_{xx}(t,x_1)\beta_{1,3} = \psi_1(t), \\
(l_2^0 u)(t) &\equiv u(t,x_0)\alpha_{2,1} + u_x(t,x_0)\alpha_{2,2} + u_{xx}(t,x_0)\alpha_{2,3} + u(t,x_1)\beta_{2,1} \\
&\quad + u_x(t,x_1)\beta_{2,2} + u_{xx}(t,x_1)\beta_{2,3} = \psi_2(t), \\
(l_3^0 u)(t) &\equiv u(t,x_0)\alpha_{3,1} + u_x(t,x_0)\alpha_{3,2} + u_{xx}(t,x_0)\alpha_{3,3} + u(t,x_1)\beta_{3,1} \\
&\quad + u_x(t,x_1)\beta_{3,2} + u_{xx}(t,x_1)\beta_{3,3} = \psi_3(t), \quad t \in (t_0,t_1).
\end{aligned} \tag{3}$$

Некоторые классы граничных задач для уравнения (1), в определенном смысле, ставятся аналогично известным граничным задачам для параболического уравнения $D_t u(t,x) = D_x^2 u(t,x)$. Поэтому многие авторы уравнение вида (1) называют псевдопараболическим. Заметим, что рассматриваемое псевдопараболическое уравнение — это обобщение многих модельных уравнений некоторых процессов (например, обобщенного уравнения влагопереноса, уравнения теплопроводности, уравнения колебания струны и т. д.).

Здесь $u(t,x) = (u_1(t,x),\dots,u_n(t,x))$ — n-мерная искомая вектор функция; $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ — заданные $n \times n$-мерные постоянные матрицы, $A_{i,j}(t,x)$ — измеримые на G матричные функции порядка $n \times n$, удовлетворяющие условиям $A_{0,j}(t,x) \in L_p(G)$, $j = 0,1,2$, и существуют функции $A_{1,j}^0(x) \in L_p(x_0,x_1)$ и $A_{0,3}^0(t) \in L_p(t_0,t_1)$ такие, что выполнены условия

$$\|A_{1,j}(t,x)\| \leqslant A_{1,j}^0(x), \quad j = 0,1,2,$$

и

$$\|A_{0,3}(t,x)\| \leqslant A_{0,3}^0(t)$$

почти всюду на G, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма соответствующей матрицы (или вектора); $Z_0(x) \in W_{p,n}^{(3)}(x_0,x_1)$, а также $\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t) \in W_{p,n}^{(1)}(t_0,t_1)$ — заданные n-мерные вектор-функции, где $W_{p,n}^{(m)}(y_0,y_1)$ — пространство n-мерных вектор-функций $Z(y) = (Z_1(y),\dots,Z_n(y))$, имеющих в смысле Соболева производные

$Z'(y),\dots,Z^{(m)}(y)\in L_{p,n}(y_0,y_1)$, а $L_{p,n}(y_0,y_1)$ — пространство всех строчных векторов $Z(y)=(Z_1(y),\dots,Z_n(y))$ с элементами из $Z_i(y)\in L_p(y_0,y_1)$, $i=1,\dots,n$. Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве Соболева

$$W_{p,n}^{(1,3)}(G)=\left\{u\in L_{p,n}(G)\backslash D_t^iD_x^ju\in L_{p,n}(G),\ i=0,1;\ j=0,1,2,3\right\}$$

с доминирующей производной $D_tD_x^3$. Норму в нем определим равенством

$$\|u\|_{W_{p,n}^{(1,3)}(G)}=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{3}\|D_t^iD_x^ju\|_{L_{p,n}(G)}.$$

Очевидно, что правые части $Z_0(x)$ и $\psi_i(t)$, $i=1,2,3$, условий (2) и (3) должны удовлетворять условиям согласования

$$\begin{aligned}
&Z_0(x_0)\alpha_{1,1}+Z_0'(x_0)\alpha_{1,2}+Z_0''(x_0)\alpha_{1,3}+Z_0(x_1)\beta_{1,1}+Z_0'(x_1)\beta_{1,2}+Z_0''(x_1)\beta_{1,3}=\psi_1(t_0);\\
&Z_0(x_0)\alpha_{2,1}+Z_0'(x_0)\alpha_{2,2}+Z_0''(x_0)\alpha_{2,3}+Z_0(x_1)\beta_{2,1}+Z_0'(x_1)\beta_{2,2}+Z_0''(x_1)\beta_{2,3}=\psi_2(t_0);\\
&Z_0(x_0)\alpha_{3,1}+Z_0'(x_0)\alpha_{3,2}+Z_0''(x_0)\alpha_{3,3}+Z_0(x_1)\beta_{3,1}+Z_0'(x_1)\beta_{3,2}+Z_0''(x_1)\beta_{3,3}=\psi_3(t_0).
\end{aligned}\tag{4}$$

Наличие условий согласования означает, что условиями (2) и (3) задана также некоторая излишняя информация о решении.

Для получения таких условий будем дифференцировать условия (3) по t. Тогда получим

$$\begin{aligned}
(l_1u)(t)\equiv{}&u_t(t,x_0)\alpha_{1,1}+u_{tx}(t,x_0)\alpha_{1,2}+u_{txx}(t,x_0)\alpha_{1,3}+u_t(t,x_1)\beta_{1,1}\\
&+u_{tx}(t,x_1)\beta_{1,2}+u_{txx}(t,x_1)\beta_{1,3}=Z_1(t)=\psi_1'(t);\\
(l_2u)(t)\equiv{}&u_t(t,x_0)\alpha_{2,1}+u_{tx}(t,x_0)\alpha_{2,2}+u_{txx}(t,x_0)\alpha_{2,3}+u_t(t,x_1)\beta_{2,1}\\
&+u_{tx}(t,x_1)\beta_{2,2}+u_{txx}(t,x_1)\beta_{2,3}=Z_2(t)=\psi_2'(t);\\
(l_3u)(t)\equiv{}&u_t(t,x_0)\alpha_{3,1}+u_{tx}(t,x_0)\alpha_{3,2}+u_{txx}(t,x_0)\alpha_{3,3}+u_t(t,x_1)\beta_{3,1}\\
&+u_{tx}(t,x_1)\beta_{3,2}+u_{txx}(t,x_1)\beta_{3,3}=Z_3(t)=\psi_3'(t).
\end{aligned}\tag{5}$$

Причем здесь будем требовать, чтобы выполнялись лишь условия $Z_i\in L_{p,n}(t_0,t_1)$, $i=1,2,3$.

Очевидно, что если $u\in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ есть решение задачи (1), (2), (5), то она является также решением задачи (1)–(3) при

$$\begin{aligned}
\psi_1(t)={}&\int_{t_0}^{t}Z_1(\tau)\,d\tau+Z_0(x_0)\alpha_{1,1}+Z_0'(x_0)\alpha_{1,2}\\
&+Z_0''(x_0)\alpha_{1,3}+Z_0(x_1)\beta_{1,1}+Z_0'(x_1)\beta_{1,2}+Z_0''(x_1)\beta_{1,3};\\
\psi_2(t)={}&\int_{t_0}^{t}Z_2(\tau)\,d\tau+Z_0(x_0)\alpha_{2,1}+Z_0'(x_0)\alpha_{2,2}+Z_0''(x_0)\alpha_{2,3}\\
&+Z_0(x_1)\beta_{2,1}+Z_0'(x_1)\beta_{2,2}+Z_0''(x_1)\beta_{2,3};\\
\psi_3(t)={}&\int_{t_0}^{t}Z_3(\tau)\,d\tau+Z_0(x_0)\alpha_{3,1}+Z_0'(x_0)\alpha_{3,2}+Z_0''(x_0)\alpha_{3,3}\\
&+Z_0(x_1)\beta_{3,1}+Z_0'(x_1)\beta_{3,2}+Z_0''(x_1)\beta_{3,3}.
\end{aligned}\tag{6}$$

Отметим, что для функций (6) условия согласования (4) выполняются тривиальным образом. Верно и обратное, т. е. если $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ является решением задачи (1)–(3), то она является также решением задачи (1), (2), (5) при $Z_1(t) = \psi_1'(t), Z_2(t) = \psi_2'(t)$ и $Z_3(t) = \psi_3'(t)$. Иначе говоря, задачи (1)–(3) и (1), (2), (5) эквивалентны в $W_{p,n}^{(1,3)}$. При этом решение задачи (1), (2), (5) есть решение задачи (1)–(3) при некоторых $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, удовлетворяющих условиям согласования автоматическим образом.

Однако задача (1), (2), (5) по постановке более естественна, чем (1)–(3). Поэтому в дальнейшем будем исследовать только задачу (1), (2), (5).

2. Интегральное представление функции в пространстве Соболева посредством определяющих операторов при исследовании нелокальной задачи

Различные классы нелокальных задач типа Бицадзе — Самарского для дифференциальных уравнений являлись предметом исследований многих математиков [12–15] и др. Также отметим, что исследованы разнообразные нелокальные задачи типа Самарского — Ионкина для различных классов дифференциальных уравнений [16, 17]. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина в модифицированных трактовках рассматривались в работах автора [18, 19].

Рассмотрим задачу (1), (2), (5). Эту задачу запишем в операторном виде

$$Vu = Z. \tag{7}$$

Здесь

$$V = (\mathrm{V}_{1,3}, l_0, l_1, l_2, l_3), \quad Z = \big(Z_{1,3}(t,x), Z_0(x), Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t)\big) \in E_{p,n}^{(1,3)},$$
$$E_{p,n}^{(1,3)} \equiv L_{p,n}(G) \times W_{p,n}^{(3)}(x_0, x_1) \times L_{p,n}(t_0, t_1) \times L_{p,n}(t_0, t_1) \times L_{p,n}(t_0, t_1).$$

Норму в пространстве $E_{p,n}^{(1,3)}$ будем считать определенной естественным образом при помощи равенства

$$\|Z\|_{E_{p,n}^{(1,3)}} = \|Z_{1,3}\|_{L_{p,n}(G)} + \|Z_0\|_{W_{p,n}^{(3)}(x_0,x_1)}$$
$$+\|Z_1\|_{L_{p,n}(t_0,t_1)} + \|Z_2\|_{L_{p,n}(t_0,t_1)} + \|Z_3\|_{L_{p,n}(t_0,t_1)}.$$

Можно доказать, что оператор $V : W_{p,n}^{(1,3)}(G) \to E_{p,n}^{(1,3)}$ линеен и ограничен.

Определение. Если для любого $Z \in E_{p,n}^{(1,3)}$ уравнение (7) (т. е. задача (1), (2), (5)) имеет единственное решение $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ такое, что

$$\|u\|_{W_{p,n}^{(1,3)}(G)} \leqslant M\|Z\|_{E_{p,n}^{(1,3)}}, \tag{8}$$

то будем говорить, что оператор V уравнения (7) осуществляет гомеоморфизм между $W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ и $E_{p,n}^{(1,3)}$ или, что задача (1), (2), (5) везде корректно разрешима. Здесь $M > 0$ — постоянная, независящая от коэффициентов краевой задачи (1), (2), (5), от размерности области G, и от $Z \in E_{p,n}^{(1,3)}$.

В случае, когда V есть гомеоморфизм между $W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ и $E_{p,n}^{(1,3)}$, оператор V обладает ограниченным обратным, определенным на $E_{p,n}^{(1,3)}$.

В современной теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач, операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. Такие гомеоморфизмы выявлены в работах Ю. М. Березанского и Я. А. Ройтберга [20], Н. В. Житарашу [21], С. С. Ахиева [22], И. Г. Мамедова [23, 24] и др. для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными.

Задачу (1), (2), (5) будем исследовать при помощи интегральных представлений специального вида для функций $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$. Для функций $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ можно найти различные интегральные представления. Функцию $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ можно представить, например, в виде

$$u(t,x) = u(t_0,x) + \int\limits_{t_0}^{t} \left[u_t(\tau,x_0) + (x-x_0)u_{tx}(\tau,x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} u_{txx}(\tau,x_0) \right] d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x} u_{txxx}(\tau,\xi)\frac{(x-\xi)^2}{2!}\,d\tau d\xi, \tag{9}$$

посредством следов $u(t_0,x)$, $u_t(t,x_0)$, $u_{tx}(t,x_0)$, $u_{txx}(t,x_0)$ и доминирующей производной $u_{txxx}(t,x)$. Существуют также представления других видов, позволяющие выразить функцию $u(t,x)$ посредством некоторых следов и частных производных. Однако мы будем ставить такой вопрос: Нельзя ли для функций $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ найти представление, которое позволило бы определить функцию $u(t,x)$ однозначно по значениям $(B_k u)$, $k = 1,\ldots,m$, некоторых заданных операторов B_k, $k = 1,\ldots,m$, на этой функции $u(t,x)$. Если, например, функцию $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ можно было бы восстановить однозначно по значениям $(V_{1,3}u)(t,x)$, $(l_0u)(x)$, $(l_1u)(t)$, $(l_2u)(t)$ и $(l_3u)(t)$, операторов $V_{1,3}$, l_0, l_1, l_2 и l_3 на этой функции, то нахождение решения задачи (1), (2), (5), не представляло бы собою особую трудность. Однако нахождение подобного представления равносильно построению обратного оператора для оператора V этой задачи. Поэтому этот вопрос мы будем ставить в следующем ослабленном виде. Найти для функции $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ представление, по которому можно было бы однозначно восстановить функцию $u(t,x)$ по значениям $(l_0u)(x)$, $(l_1u)(t)$, $(l_2u)(t)$, $(l_3u)(t)$ и $D_tD_x^3u(t,x)$.

Для изучения этого вопроса мы будем использовать формулу (9). Сначала формулу (9) запишем в виде

$$u(t,x) = (Qb)(t,x) \equiv \varphi(x) + \int\limits_{t_0}^{t} \left[b_{1,0}(\tau) + (x-x_0)b_{1,1}(\tau) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\, b_{1,2}(\tau) \right] d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^2}{2!}\, b_{1,3}(\tau,\xi)\, d\tau d\xi, \quad (t,x) \in G, \tag{10}$$

где $b = \big(b_{1,3}(t,x), \varphi(x), b_{1,0}(t), b_{1,1}(t), b_{1,2}(t)\big)$ и

$$\begin{gathered} \varphi(x) = u(t_0,x), \quad b_{1,0}(t) = u_t(t,x_0), \quad b_{1,1}(t) = u_{tx}(t,x_0), \\ b_{1,2}(t) = u_{txx}(t,x_0), \quad b_{1,3}(t) = u_{txxx}(t,x). \end{gathered} \tag{11}$$

Известно, что для любой функции $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ существует единственная пятерка $b = \big(b_{1,3}, \varphi, b_{1,0}, b_{1,1}, b_{1,2}\big) \in E_{p,n}^{(1,3)}$, посредством которой эту функцию можно представить в виде (10).

Можно доказать, что верно и обратное. Иначе говоря, для любой заданной пятерки $b = (b_{1,3}, \varphi, b_{1,0}, b_{1,1}, b_{1,2})$ из $E_{p,n}^{(1,3)}$ функция $u(t,x)$, определяемая равенством (10), принадлежит пространству $W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ и обладает следами $u(t_0,x)$, $u_t(t,x_0)$, $u_{tx}(t,x_0)$, $u_{txx}(t,x_0)$, а также доминирующей производной $u_{txxx}(t,x)$, определяемой равенствами (11).

Боле того, при этом можно найти положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\|b\|_{E_{p,n}^{(1,3)}} \leqslant \|Qb\|_{W_{p,n}^{(1,3)}(G)} \leqslant C_2\|b\|_{E_{p,n}^{(1,3)}} \quad \left(\forall\, b \in E_{p,n}^{(1,3)}\right). \tag{12}$$

Иначе говоря, оператор Q осуществляет гомеоморфизм между пространствами $E_{p,n}^{(1,3)}$ и $W_{p,n}^{(1,3)}(G)$. Поэтому $W_{p,n}^{(1,3)}(G) = E_{p,n}^{(1,3)}$ в смысле гомеоморфизма.

Теперь элемент $b = (b_{1,3}, \varphi, b_{1,0}, b_{1,1}, b_{1,2}) \in E_{p,n}^{(1,3)}$ постараемся выбирать таким образом, чтобы соответствующая функция (10) удовлетворяла условиям (2) и (5). Для этого подставим функцию (10) в условия (2) и (5).

Тогда из (2) получим, что

$$(l_0u)(x) = \varphi(x). \tag{13}$$

Из (5) получим следующие условия:

$$\begin{gathered}
(l_1u)(t) = b_{1,0}(t)\alpha_{1,1} + b_{1,1}(t)\alpha_{1,2} + b_{1,2}(t)\alpha_{1,3} \\
+\left[b_{1,0}(t) + \Delta b_{1,1}(t) + \frac{\Delta^2}{2!}b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^2}{2!} b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{1,1} \\
+\left[b_{1,1}(t) + \Delta b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1}(x_1-\xi)b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{1,2} + \left[b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{1,3}; \\
(l_2u)(t) = b_{1,0}(t)\alpha_{2,1} + b_{1,1}(t)\alpha_{2,2} + b_{1,2}(t)\alpha_{2,3} \\
+\left[b_{1,0}(t) + \Delta b_{1,1}(t) + \frac{\Delta^2}{2!}b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^2}{2!} b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{2,1} \\
+\left[b_{1,1}(t) + \Delta b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1}(x_1-\xi)b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{2,2} + \left[b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{2,3}; \\
(l_3u)(t) = b_{1,0}(t)\alpha_{3,1} + b_{1,1}(t)\alpha_{3,2} + b_{1,2}(t)\alpha_{3,3} \\
+\left[b_{1,0}(t) + \Delta b_{1,1}(t) + \frac{\Delta^2}{2!}b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^2}{2!} b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{3,1} \\
+\left[b_{1,1}(t) + \Delta b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1}(x_1-\xi)b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{3,2} + \left[b_{1,2}(t) + \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)\,d\xi\right]\beta_{3,3},
\end{gathered} \tag{14}$$

где $\Delta = x_1 - x_0$. Равенства (14) запишем в виде

$$\begin{gathered}
(l_1u)(t) = b_{1,0}(t)(\alpha_{1,1} + \beta_{1,1}) + b_{1,1}(t)(\alpha_{1,2} + \Delta\beta_{1,1} + \beta_{1,2}) \\
+ b_{1,2}(t)\left(\alpha_{1,3} + \frac{\Delta^2}{2!}\beta_{1,1} + \Delta\beta_{1,2} + \beta_{1,3}\right) \\
+ \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)\left[\beta_{1,1}\frac{(x_1-\xi)^2}{2!} + \beta_{1,2}(x_1-\xi) + \beta_{1,3}\right]d\xi;
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
(l_2u)(t) &= b_{1,0}(t)(\alpha_{2,1}+\beta_{2,1}) + b_{1,1}(t)(\alpha_{2,2}+\Delta\beta_{2,1}+\beta_{2,2}) \\
&\quad + b_{1,2}(t)\left(\alpha_{2,3}+\frac{\Delta^2}{2!}\beta_{2,1}+\Delta\beta_{2,2}+\beta_{2,3}\right) \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)\left[\beta_{2,1}\frac{(x_1-\xi)^2}{2!}+\beta_{2,2}(x_1-\xi)+\beta_{2,3}\right]d\xi; \\
(l_3u)(t) &= b_{1,0}(t)(\alpha_{3,1}+\beta_{3,1}) + b_{1,1}(t)(\alpha_{3,2}+\Delta\beta_{3,1}+\beta_{3,2}) \\
&\quad + b_{1,2}(t)\left(\alpha_{3,3}+\frac{\Delta^2}{2!}\beta_{3,1}+\Delta\beta_{3,2}+\beta_{3,3}\right) \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)\left[\beta_{3,1}\frac{(x_1-\xi)^2}{2!}+\beta_{3,2}(x_1-\xi)+\beta_{3,3}\right]d\xi.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Введем следующие обозначения

$$
\gamma_{1,1}=\alpha_{1,1}+\beta_{1,1}; \quad \gamma_{1,2}=\alpha_{1,2}+\Delta\beta_{1,1}+\beta_{1,2};
$$
$$
\gamma_{1,3}=\alpha_{1,3}+\frac{\Delta^2}{2!}\beta_{1,1}+\Delta\beta_{1,2}+\beta_{1,3}; \quad \gamma_{2,1}=\alpha_{2,1}+\beta_{2,1};
$$
$$
\gamma_{2,2}=\alpha_{2,2}+\Delta\beta_{2,1}+\beta_{2,2}; \quad \gamma_{2,3}=\alpha_{2,3}+\frac{\Delta^2}{2!}\beta_{2,1}+\Delta\beta_{2,2}+\beta_{2,3};
$$
$$
\gamma_{3,1}=\alpha_{3,1}+\beta_{3,1}; \quad \gamma_{3,2}=\alpha_{3,2}+\Delta\beta_{3,1}+\beta_{3,2};
$$
$$
\gamma_{3,3}=\alpha_{3,3}+\frac{\Delta^2}{2!}\beta_{3,1}+\Delta\beta_{3,2}+\beta_{3,3}
$$

и

$$
a_1(x)=\beta_{1,1}\frac{(x_1-x)^2}{2!}+\beta_{1,2}(x_1-x)+\beta_{1,3}; \quad a_2(x)=\beta_{2,1}\frac{(x_1-x)^2}{2!}+\beta_{2,2}(x_1-x)+\beta_{2,3};
$$
$$
a_3(x)=\beta_{3,1}\frac{(x_1-x)^2}{2!}+\beta_{3,2}(x_1-x)+\beta_{3,3}.
$$

Тогда равенства (15) примут вид:

$$
\begin{aligned}
b_{1,0}(t)\gamma_{1,1}+b_{1,1}(t)\gamma_{1,2}+b_{1,2}(t)\gamma_{1,3} &= (l_1u)(t)-\int_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_1(\xi)\,d\xi; \\
b_{1,0}(t)\gamma_{2,1}+b_{1,1}(t)\gamma_{2,2}+b_{1,2}(t)\gamma_{2,3} &= (l_2u)(t)-\int_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_2(\xi)\,d\xi; \\
b_{1,0}(t)\gamma_{3,1}+b_{1,1}(t)\gamma_{3,2}+b_{1,2}(t)\gamma_{3,3} &= (l_3u)(t)-\int_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_3(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Равенства (16) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_{1,0}(t)$, $b_{1,1}(t)$ и $b_{1,2}(t)$.

При помощи $3n$-мерной матрицы

$$
\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{2,1} & \gamma_{3,1} \\ \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} & \gamma_{3,2} \\ \gamma_{1,3} & \gamma_{2,3} & \gamma_{3,3} \end{pmatrix}
$$

систему (16) запишем в виде векторного уравнения

$$\big(b_{1,0}(t), b_{1,1}(t), b_{1,2}(t)\big)\gamma = \Bigg((l_1u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_1(\xi)\,d\xi, (l_2u)(t) \\ - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_2(\xi)\,d\xi, (l_3u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_3(\xi)\,d\xi\Bigg). \tag{16*}$$

Пусть матрица γ обратима. Обратную матрицу γ^{-1} обозначим через

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{pmatrix},$$

причем каждая из $K_{i,j}$ является некоторой постоянной квадратной матрицей порядка n. Тогда из (16*) получим

$$\big(b_{1,0}(t), b_{1,1}(t), b_{1,2}(t)\big) = \Bigg((l_1u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_1(\xi)\,d\xi, (l_2u)(t) \\ - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_2(\xi)d\xi, (l_3u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_3(\xi)\,d\xi\Bigg) \times \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} b_{1,0}(t) = \Bigg[(l_1u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_1(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{1,1} \\ + \Bigg[(l_2u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_2(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{2,1} + \Bigg[(l_3u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_3(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{3,1}; \\ b_{1,1}(t) = \Bigg[(l_1u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_1(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{1,2} \\ + \Bigg[(l_2u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_2(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{2,2} + \Bigg[(l_3u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_3(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{3,2}; \\ b_{1,2}(t) = \Bigg[(l_1u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_1(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{1,3} \\ + \Bigg[(l_2u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_2(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{2,3} + \Bigg[(l_3u)(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} b_{1,3}(t,\xi)a_3(\xi)\,d\xi\Bigg]K_{3,3}. \end{gathered} \tag{17}$$

Теперь выражения (17) учтем в равенстве (10). Тогда получим

$$
\begin{gathered}
u(t,x)=(l_0u)(x)+\int\limits_{t_0}^{t}(l_1u)(\tau)\left[K_{1,1}+K_{1,2}(x-x_0)+K_{1,3}\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]d\tau\\
+\int\limits_{t_0}^{t}(l_2u)(\tau)\left[K_{2,1}+K_{2,2}(x-x_0)+K_{2,3}\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]d\tau\\
+\int\limits_{t_0}^{t}(l_3u)(\tau)\left[K_{3,1}+K_{3,2}(x-x_0)+K_{3,3}\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]d\tau\\
+\iint\limits_{G}b_{1,3}(\tau,\xi)\left\{E\frac{(x-\xi)^2}{2!}\,\theta(t-\tau)\theta(x-\xi)\right.\\
-\theta(t-\tau)\Big[a_1(\xi)K_{1,1}+a_2(\xi)K_{2,1}+a_3(\xi)K_{3,1}\\
+\Big(a_1(\xi)K_{1,2}+a_2(\xi)K_{2,2}+a_3(\xi)K_{3,2}\Big)(x-x_0)\\
\left.+\Big(a_1(\xi)K_{1,3}+a_2(\xi)K_{2,3}+a_3(\xi)K_{3,3}\Big)\frac{(x-x_0)^2}{2!}\Big]\right\}d\tau d\xi,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

где $\theta(z)$ — функция Хэвисайда на пространстве $\mathbb{R}$ действительных чисел, а E — n-мерная единичная матрица.

Пусть

$$
\begin{aligned}
\beta_1(x)&=K_{1,1}+K_{1,2}(x-x_0)+K_{1,3}\frac{(x-x_0)^2}{2!}=-q_1(x),\\
\beta_2(x)&=K_{2,1}+K_{2,2}(x-x_0)+K_{2,3}\frac{(x-x_0)^2}{2!}=-q_2(x),\\
\beta_3(x)&=K_{3,1}+K_{3,2}(x-x_0)+K_{3,3}\frac{(x-x_0)^2}{2!}=-q_3(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_0(\tau,\xi;t,x)&=\theta(t-\tau)\\
&\times\left[\frac{(x-\xi)^2}{2!}\,\theta(x-\xi)E+a_1(\xi)q_1(x)+a_2(\xi)q_2(x)+a_3(\xi)q_3(x)\right].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Теперь формулу (18) запишем в виде

$$
\begin{gathered}
u(t,x)=(l_0u)(x)+\int\limits_{t_0}^{t}(l_1u)(\tau)\beta_1(x)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}(l_2u)(\tau)\beta_2(x)\,d\tau\\
+\int\limits_{t_0}^{t}(l_3u)(\tau)\beta_3(x)\,d\tau+\iint\limits_{G}u_{txxx}(\tau,\xi)R_0(\tau,\xi;t,x)\,d\tau d\xi.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Если* $\det\gamma\neq 0$*, то любая функция* $u\in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ *представима в виде* (20).

Очевидно, что правая часть формулы (20) определяется посредством значений $(l_0u)(x)$, $(l_1u)(t)$, $(l_2u)(t)$, $(l_3u)(t)$ и $u_{txxx}(t,x)$ операторов l_0, l_1, l_2, l_3 и $D_tD_x^3$ на рассматриваемой функции $u(t,x)$. Поэтому операторы l_0, l_1, l_2, l_3 и $D_tD_x^3$ будем называть определяющими операторами для представления (20).

3. Задача Гурса классического вида как частный случай нелокальной комбинированной задачи (1), (2), (5). Теперь рассмотрим следующий частный случай задачи (1), (2), (5):

$$D_tD_x^3u(t,x)+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<4}}^{1}\sum_{j=0}^{3}\big(D_t^iD_x^ju(t,x)\big)A_{i,j}(t,x)=Z_{1,3}(t,x),\quad (t,x)\in G, \tag{21}$$

$$(l_0u)(x)\equiv u(t_0,x)=Z_0(x), \tag{22}$$

$$\begin{cases}(l_1u)(t)\equiv u_t(t,x_0)\alpha_{1,1}+u_{tx}(t,x_0)\alpha_{1,2}+u_{txx}(t,x_0)\alpha_{1,3}=Z_1(t),\\ (l_2u)(t)\equiv u_t(t,x_0)\alpha_{2,1}+u_{tx}(t,x_0)\alpha_{2,2}+u_{txx}(t,x_0)\alpha_{2,3}=Z_2(t),\\ (l_3u)(t)\equiv u_t(t,x_0)\alpha_{3,1}+u_{tx}(t,x_0)\alpha_{3,2}+u_{txx}(t,x_0)\alpha_{3,3}=Z_3(t).\end{cases} \tag{23}$$

Пусть детерминант $3n$-мерной матрицы

$$\gamma=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1}&\alpha_{2,1}&\alpha_{3,1}\\ \alpha_{1,2}&\alpha_{2,2}&\alpha_{3,2}\\ \alpha_{1,3}&\alpha_{2,3}&\alpha_{3,3}\end{pmatrix}$$

отличен от нуля, т. е. $\det\gamma\neq 0$. Тогда условия (23) можно привести к виду

$$\begin{cases}u_t(t,x_0)=\bar Z_1(t),\\ u_{tx}(t,x_0)=\bar Z_2(t),\\ u_{txx}(t,x_0)=\bar Z_3(t).\end{cases} \tag{24}$$

Здесь

$$\begin{cases}\bar Z_1(t)=Z_1(t)K_{1,1}^0+Z_2(t)K_{2,1}^0+Z_3(t)K_{3,1}^0;\\ \bar Z_2(t)=Z_1(t)K_{1,2}^0+Z_2(t)K_{2,2}^0+Z_3(t)K_{3,2}^0;\\ \bar Z_3(t)=Z_1(t)K_{1,3}^0+Z_2(t)K_{2,3}^0+Z_3(t)K_{3,3}^0,\end{cases} \tag{25}$$

а

$$K^0=\begin{pmatrix}K_{1,1}^0&K_{1,2}^0&K_{1,3}^0\\ K_{2,1}^0&K_{2,2}^0&K_{2,3}^0\\ K_{3,1}^0&K_{3,2}^0&K_{3,3}^0\end{pmatrix}$$

— обратная матрица для матрицы γ, т. е. $K^0=\gamma^{-1}$, причем $K_{i,j}^0$ — квадратные матрицы порядка n.

Равенства (25) показывают, что если $Z_i\in L_{p,n}(t_0,t_1)$, $i=1,2,3$, то $\bar Z_i\in L_{p,n}(t_0,t_1)$, $i=1,2,3$. Поэтому условия (23) и (24) эквивалентны.

Кроме того, условия (22) и (24) можно рассматривать как условия Гурса неклассического вида. Очевидно также, что если $\det\gamma\neq 0$, то условия (22) и (23) эквиваленты условиям Гурса неклассического вида (22) и (24).

Если функция $u\in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ удовлетворяет условиям Гурса неклассического вида (22) и (24), то она удовлетворяет также условиям Гурса классического вида (22) и

$$\begin{cases} u(t, x_0) = \varphi_1(t); \\ u_x(t, x_0) = \varphi_2(t); \\ u_{xx}(t, x_0) = \varphi_3(t) \end{cases} \tag{26}$$

при

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = Z_0(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{Z}_1(\tau)\, d\tau; \\ \varphi_2(t) = Z_0'(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{Z}_2(\tau)\, d\tau; \\ \varphi_3(t) = Z_0''(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{Z}_3(\tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{27}$$

Верно и обратное, в том смысле, что если функция $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ удовлетворяет условиям (22) и (26) (где $Z_0 \in W_{p,n}^{(3)}(x_0, x_1)$ и $\varphi_i \in W_{p,n}^{(1)}(t_0, t_1)$, $i = 1, 2, 3$), то она удовлетворяет также условиям (22), (24) при $\bar{Z}_1(t) = \varphi_1'(t)$, $\bar{Z}_2(t) = \varphi_2'(t)$, $\bar{Z}_3(t) = \varphi_3'(t)$. Таким образом, в пространстве $W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ условия Гурса неклассического вида (22), (24) эквиваленты условиям Гурса классического вида (22), (26). Однако в случае условий Гурса (22), (26) правые части краевых условий, кроме условий $Z_0 \in W_{p,n}^{(3)}(x_0, x_1)$ и $\varphi_i \in W_{p,n}^{(1)}(t_0, t_1)$ должны подчиняться также следующим условиям согласования: $Z_0(x_0) = \varphi_1(t_0)$, $Z_0'(x_0) = \varphi_2(t_0)$, $Z_0''(x_0) = \varphi_3(t_0)$.

В случае же условий Гурса неклассического вида (22), (24) для правых частей краевых условий, кроме $Z_0 \in W_{p,n}^{(3)}(x_0, x_1)$ и $\bar{Z}_i \in L_{p,n}(t_0, t_1)$, $i = 1, 2, 3$, никаких дополнительных условий типа согласования не требуются. Поэтому задача Гурса неклассического вида (21), (22), (24) по постановке является более естественной, чем задача Гурса классического вида (21), (22), (26).

Литература

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 185, № 4.—С. 739–740.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условиям // Диф. уравнения.—1977.—Т. 13, № 2.—С. 294–304.
3. *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Диф. уравнения.—1979.—Т. 15, № 7.—С. 1284–1296.
4. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории современной дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.—1980.—Т. 16, № 11.—С. 1221–1228.
5. *Шхануков М. Х., Солдатов А. П.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 297, № 3.—С. 547–552.
6. *Showalter R. E., Ting T. W.* Pseudo-parabolic partial differential equations // Math. Anal.—1970.—Vol. 1.—P. 1–26.
7. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Diff. Equat.—1972.—Vol. 12, № 3.—P. 559–565.
8. *Rundell W., Stecher M.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc.—1979.—Vol. 76, № 2.—P. 253–257.
9. *Гилев В. Д., Шадрин Г. А.* Построение фундаментального решения для уравнения, описывающего движение жидкости в трещиноватых средах // Вычисл. математика и программирование.—М.: Изд-во МГПИ им. В. И. Ленина, 1976.—Вып. 4.—С. 102–111.
10. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.

11. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений // Диф. уравнения.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 145–152.
12. *Салтыкова Н. М.* Обобщенная задача Бицадзе — Самарского для уравнения смешанного типа второго рода // Изв. высших учебных заведений. Математика.—1981.—Т. 234, № 11.—С. 43–48.
13. *Ахмедов Ф. Ш.* Оптимизация гиперболических систем при нелокальных краевых условиях типа Бицадзе — Самарского // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 283, № 4.—С. 787–791.
14. *Репин О. А., Килбас А. А.* Аналог задачи Бицадзе — Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 5.—С. 638–644.
15. *Ковалева Л. А.* О модифицированной задаче Бицадзе — Самарского // Вестн. СамГТУ. Сер. физ.-мат. науки.—2007.—№ 1.—С. 10–15.
16. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 10.—С. 1468–1478.
17. *Гулин А. В., Удовиченко Н. С.* Разностная схема для задачи Самарского — Ионкина с параметром // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 7.—С. 963–969.
18. *Mamedov I. G.* Generalization of multipoint boundary-value problems of Bitsadze–Samarski and Samarski–Ionkin type for fourth order loaded hyperbolic integro-differential equations and their operator generalization // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan.—2005.—Vol. 23.—P. 77–84.
19. *Мамедов И. Г.* Смешанная задача с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина, возникающая при моделировании фильтрации жидкости в трещиноватых средах // Изв. НАН Азерб. Сер. физ.-техн. и мат. наук.—2006.—Т. 26, № 3.—С. 32–37.
20. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Украинский мат. журн.—1967.—Т. 19, № 5.—С. 3–32.
21. *Житарашу Н. В.* Теорема о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории модельных начальных параболических краевых задач // Мат. исследования.—Кишинев, 1986.—№ 88.—С. 40–59.
22. *Ахиев С. С.* Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2.—С. 265–269.
23. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2009.—Т. 49, № 1.—С. 99–110.
24. *Мамедов И. Г.* Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 2.—С. 54–64.

Статья поступила 25 февраля 2013 г.

Мамедов Ильгар Гурбат оглы
Институт Кибернетики им. А. И. Гусейнова НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ1141, Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9
E-mail: `ilgar-mammadov@rambler.ru`

NONLOCAL COMBINED PROBLEM OF BITSADZE–SAMARSKI AND SAMARSKI–IONKIN TYPE FOR A SYSTEM OF PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

Mamedov I. G.

We consider a boundary value problem for a fourth order system of pseudoparabolic equations with discontinuous coefficients and with conditions Bicadze — Samarsky and Samarsky — Ionkin. We find integral representation for a functions in the Sobolev space, which allows one to recover it through the values of certain operators (defining operators), taken at the function. We also justify formulation of the Goursat problem with nonclassical boundary conditions.

Key words: pseudoparabolic equation, nonlocal problem.